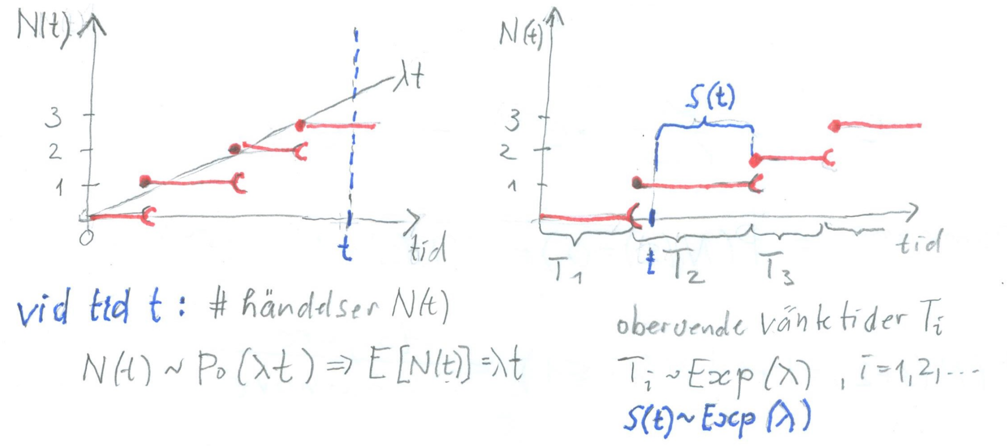
Föreläsning 10

Poissonprocessen (fortsättning)



Exempel / Lektionsuppgift För en poissonprocess med intensitet $\lambda > 0$ anta att högst en händelse inträffade under de första två tidsenheterna. Beräkna sannolikheten för att det efter $s+2$ tidsenheter har inträffat exakt $k+1$ händelser, $s \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Svar: Sökt är

$$P(N(s+2) = k+1 | N(2) \leqslant 1) = \frac{P(N(s+2) = k+1, N(2) \leqslant 1)}{P(N(2) \leqslant 1)}.$$

Det gäller att

$$\begin{aligned}
\text{täljare} &= P(N(s+2) = k+1,\ N(2) = 0) + P(N(s+2) = k+1,\ N(2) = 1) \\
&= P(N(s+2) - N(2) = k+1,\ N(2) = 0) + P(N(s+2) - N(2) = k,\ N(2) = 1) \\
&= P(N(s+2) - N(2) = k+1) \cdot P(N(2) = 0) \\
&\quad + P(N(s+2) - N(2) = k) \cdot P(N(2) = 1) \\
&= P(N(s) = k+1) \cdot P(N(2) = 0) + P(N(s) = k) \cdot P(N(2) = 1) \\
&= e^{-s\lambda} \cdot \frac{(s\lambda)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{-2\lambda} + e^{-s\lambda} \cdot \frac{(s\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^1}{1!}
\end{aligned}$$

Dessutom

$$\text{nämnare} = P(N(2) = 0) + P(N(2) = 1) = e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)}{1!}$$

Sammanfattningsvist

$$\begin{aligned}
&P(N(s+2) = k+1 | N(2) \leqslant 1) \\
&\quad = \frac{\text{täljare}}{\text{nämmare}} = \frac{e^{-s\lambda}}{1+2\lambda} \cdot \left(\frac{(s\lambda)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(s\lambda)^k}{k!} \cdot 2\lambda \right)
\end{aligned}$$

Exempel För en poissonprocess med intensitet $\lambda > 0$ beräkna man sannolitheten att den $k+1$:e händelsen inträffar efter tid $t+s$, givet att precis k händelser har inträffat vid tid t, $s, t \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Svar, väg 1: Sökt är

$$\begin{aligned}
&P(N(t+s) = k | N(t) = k) \\
&\quad = \frac{P(N(t+s) = k, N(t) = k)}{P(N(t) = k)} = \frac{P(N(t+s) - N(t) = 0, N(t) = k)}{P(N(t) = k)} \\
&\quad = \frac{P(N(t+s) - N(t) = 0) \cdot P(N(t) = k)}{P(N(t) = k)} = P(N(t+s) - N(t) = 0) \\
&\quad = P(N(s) = 0) = e^{\lambda s}
\end{aligned}$$

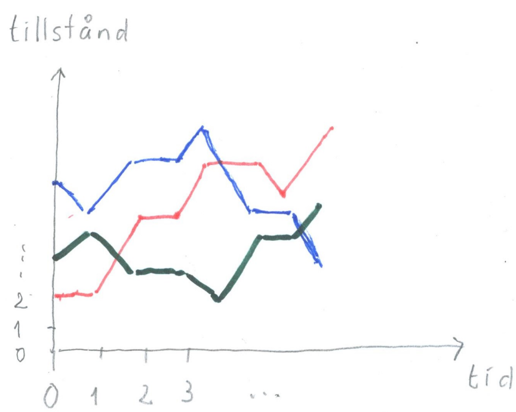
Väg 2:

$$P(N(t+s) = k | N(t) = k) = P(S(t) \geq s) = 1 - F_{S(t)} = e^{\lambda s}$$

eftersom $S(t) \sim Exp(s\lambda)$.

Markovkedjor

Definition (a) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en följd av stokastiska variabler som kan anta värdena $0, 1, \ldots, M$. Man säger att systemet är *vid tid n i tillstånd* $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ om $X_n = i$.



(b) Följden $X_1, X_2, \ldots$ bilder en *Markovkedja* om varje gång när systemet är i tillstånd $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ finns det en sannolikhet p_{ij} att systemet kommer att varva i tillstånd j näst. Dvs för alla $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j$

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)$$

(c) Värdena p_{ij}, $i, j \in \{0, 1, \ldots, M\}$, kallas *övergångssannolikheter*. Matrisen

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{i,j=\{0,1,\ldots,M\}}$$

kallas *övergångsmatris.*

Anmärkning

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) &= p_{ij} \\ &= P(X_{n+1} = j|X_n = i)\end{aligned}$$

kallas *Markovprincipen.*

Exempel Anta att vädret (det regnar / regnar inte) imorgon beror på vädret idag. Om det regnar idag, så regnar det imorgon med sannolikhet α, och om det inte regnar idag så regnar det imorgon med sannolikhet β. Beskriv vädersystemet som en Markovkedja, dvs bestäm övergångsmatrisen.

Svar: Låt

$$X_n := \begin{cases} 1 & \text{regnar dag } n \\ 0 & \text{regnar inte dag } n \end{cases}, \quad n \in \{0, 1, \dots\}.$$

$p_{11} = \alpha, \quad p_{10} = 1 - \alpha, \quad p_{01} = \beta, \quad p_{00} = 1 - \beta$ medför

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\beta & \beta \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

Exempel (Ehrenfest-modell) Anta att det finns M molekyler (kulor) i två urnor. Vid varje tidpunkt $n = 1, 2, \dots$ dras en av molekylerna på måfå och flyttas från den dåvarande urnan till den andra urnan. Låt

$$X_n := \#\text{ molekyler i den första urnan just efter det } n:e \text{ flyttet.}$$

Beskriv systemet som en Markovkedja, dvs ange övergångsmatrisen.

Svar:

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1} &= \frac{M-i}{M} && 0 \leqslant i \leqslant M-1 && \text{molekylen dras fran urna 2} \\
p_{i,i-1} &= \frac{i}{M} && 1 \leqslant i \leq M && \text{molekylen dras från urna 1} \\
p_{ij} &= 0 && \text{annars, dvs } |i-j| \neq 1 \; .
\end{aligned}$$

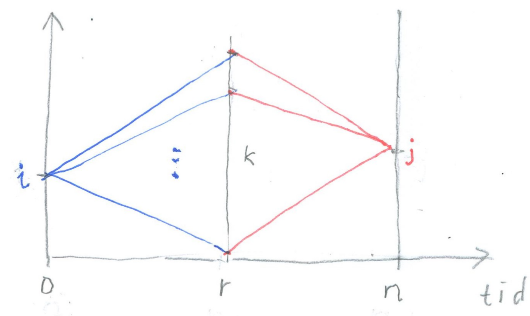
Detta medför

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{M-1}{M} & 0 & & \\ 0 & \frac{2}{M} & 0 & \frac{M-2}{M} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & \frac{M-1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sats (Chapman-Kolmogorov ekvationer) Låt $p_{ij}^{(n)}$ man vara sannolikheten att systemet är i tillstånd i och kommer att vara i tillstånd j efter n steg (tidsenheter). Det gäller att

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(r)} \cdot p_{kj}^{(n-r)} \quad \text{för alla} \quad 0 < r < n\,.$$

Bevisskiss



$$p_{ik}^{(r)} \quad \cdot \quad p_{kj}^{(n-r)} \qquad \text{för alla möjliga } k$$

Anmärkningar (1) Låt

$$\mathbf{P}^{(n)} = \left[p_{ij}^{(n)} \right]_{i,j=0,\cdots,M}$$

beteckna n-steg övergångsmatrisen. Satsen kan skrivas som

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(r)} \cdot \mathbf{P}^{(n-r)} \quad (\text{matrismultiplikation})\,.$$

(2) I synnerhet, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)}$ och

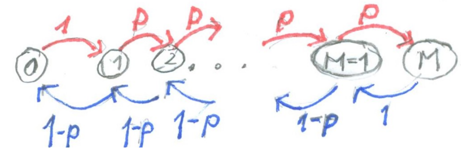
$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdots \; n \text{ gånger} \cdots \mathbf{P} = \mathbf{P}^{n} \quad (\text{matrispotens})\,.$$

Exempel Givet

$$\begin{array}{ll} p_{i,i+1} = p & i = 0, \ldots, M-1 \\ p_{i,i-1} = 1-p & i = 1, \ldots, M \\ p_{0,1} = p_{M,M-1} = 1 & p_{ij} = 0 \text{ annars}\,. \end{array}$$

Systemet kallas *slumpvandring på* $\{0, 1, \ldots, M\}$ *med reflektion.* Bestäm n-steg övergångsmatrisen.

Svar:



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1-p & 0 & p & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & 1-p & 0 & p \\ & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessutom
$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdots n \text{ gånger} \cdots \mathbf{P} = \mathbf{P}^n \, .$$

Fördelning vid tid n

Sats Låt
$$\mathbf{p}^{(0)} \equiv (p_0, p_1, \ldots, p_n) := \left(P\left(X_0 = 0\right), P\left(X_0 = 1\right), \ldots, P\left(X_0 = M\right)\right) \, .$$
Då är
$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{(\mathbf{n})} &\equiv \left(p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots, p_M^{(n)}\right) := \left(P\left(X_n = 0\right), P\left(X_n = 1\right), \ldots, P\left(X_n = M\right)\right) \\ &= \mathbf{p}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^n \quad \text{(matrismultiplikation radvektor med matris)} \, .\end{aligned}$$

Exempel Låt
$$\mathbf{p}^{(\mathbf{0})} = (0 \; 0 \; 1) \, .$$
och
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$
Bestäm
$$\mathbf{p}^{(2)} = \left(P\left(X_2 = 0\right), P\left(X_2 = 1\right), \ldots, P\left(X_2 = 2\right)\right) \, .$$
Svar: Vi har
$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,41 & 0.35 & 0,24 \\ 0,32 & 0.40 & 0.28 \\ 0.48 & 0.31 & 0.21 \end{bmatrix}$$
och således
$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^2 = (0.48 \quad 0.31 \quad 0.21) \, .$$

Konvergerar $p_i^{(n)}$ **och** $p_{ij}^{(n)}$ **då** $n \longrightarrow \infty$ **?**

Definition Om

(i) för alla $i, j = 0, 1, \ldots, M$, det finns $n > 0$ (som kan bero på i, j) sådant att $p_{ij}^{(n)} > 0$ och

(ii) för alla $i = 0, 1, \ldots, M$, det inte finns något $d \geq 2$ sådant att $p_{ii}^{(n)} > 0$ medför $n = k \cdot d$ för något $k \in \mathbb{N}$,

så kallas Markovkedjan *ergodisk*.

Anmärkningar (1) Antag (i). Om (ii) för något $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$, så gäller (ii) för alla $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$.

(2) Antag (i). Om för något $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ det finns något $d \geq 2$ sådant att $p_{ii}^{(n)} > 0$ medför $n = k \cdot d$, så gäller för alla $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ att $p_{ii}^{(n')} > 0$ medför $n' = k' \cdot d$,

$k, k' \in \mathbb{N}$. I så fall kallas det minsta sådant d *period* för den motsvaranden Markovkedjan.

(3) Man säger att en Markovkedja med egenskap (i) är *irreducibel.* En Markovkedja med egenskap (ii) kallas *aperiodisk.*

Sats För en ergodisk Markovkedja existerar gränsvärdena

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \quad \text{oberoende av} \quad i = 0, \ldots, M$$

för alla $j = 0, \ldots, M$. $\{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M\}$ är de unika icke-negativa värdena sådana att

$$[\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M] = [\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M] \cdot \mathbf{P}$$

där $\sum_{k=0}^{M} \pi_k = 1$. Dessutom,

$$\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi_i\,, \quad i = 0, \ldots, M.$$

Anmärkningar (1) Ekvationssystemet är ekvivalent med

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{M} \pi_k p_{kj} \quad , j = 0, 1, \ldots, M\,.$$

(2) Om $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M)$ är fördelningen för X_0, dvs

$$P\left(X_0 = 0\right) = \pi_0, P\left(X_0 = 1\right) = \pi_1, \ldots, P\left(X_0 = M\right) = \pi_M$$

så är $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M)$ fördelningen för alla $X_0, X_1, \ldots$. En fördelning $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M)$ med denna egenskap kallas *stationär.*

Exempel / Lektionsuppgift Visa att

$$\pi_j = \begin{pmatrix} M \\ j \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^M, \quad j = 0, \ldots, M\,,$$

är en stationär fördelning i Ehrenfest-modellen. Är den motsvarande Markovkedjan $X_0, X_1, \ldots$, ergodisk?

Svar: Vi behöver verifiera

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{M} \pi_k p_{kj}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, M\,.$$

Vi påminner oss om

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{M-1}{M} & 0 & & \\ 0 & \frac{2}{M} & 0 & \frac{M-2}{M} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & \frac{M-1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uppenbarligen gäller

$$\text{för } j = 0: \quad \pi_0 = \frac{1}{M}\pi_1 \quad \text{och för } j = M: \quad \pi_M = \frac{1}{M}\pi_{M-1}.$$

Det återstår att pröva

$$\pi_j = \pi_{j-1} \cdot \frac{M-j+1}{M} + \pi_{j+1}\frac{j+1}{M}$$

för $1 \leq j \leq M-1$. Men detta fås från

$$\begin{aligned}
\pi_i &= 2^{-M}\begin{pmatrix} M \\ j \end{pmatrix} = 2^{-M}\left(\begin{pmatrix} M-1 \\ j-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M-1 \\ j \end{pmatrix}\right) \quad \text{(Pascals triangel identitet)} \\
&= 2^{-M}\begin{pmatrix} M \\ j-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{M-j+1}{M} + 2^{-M}\begin{pmatrix} M \\ j+1 \end{pmatrix}\frac{j+1}{M} \\
&= \pi_{j-1}\frac{M-j+1}{M} + \pi_{j+1}\frac{j+1}{M}.
\end{aligned}$$

Den motsvarande Markovkedjan $X_0, X_1, \ldots$, är inte ergodisk. Den har period $d = 2$.

Exempel / Lektionsuppgift Givet övergångsmatrisen till en Markovkedja,

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0,1,2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

avgör om kedjan är ergodisk. I så fall beräkna den stationära fördelningen.

Svar: Vi har

$$\mathbf{P}^2 = (p_{ij}^{(2)})_{i,j=0,1,2} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/18 & 5/18 \\ 5/12 & 5/12 & 1/6 \\ 5/12 & 1/6 & 5/12 \end{pmatrix}.$$

- Kedjan är irreducibel eftersom $p_{ij}^{(2)} > 0$ för alla $i, j = 0, 1, 2$.
- Kedjan är aperiodisk eftersom $p_{00}^{(1)} > 0$ och $p_{00}^{(2)} > 0$.

Kedjan är därför ergodisk. Den unika icke-negativa lösningen av systemet

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2] = [\pi_0, \pi_1, \pi_2] \cdot \mathbf{P}$$

med $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ är

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (3/7, 2/7, 2/7).$$