Föreläsning 13

Momentgenererande funktioner

Vi påminner om

$$E[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\text{alla } k} g(k)\, P(X = k) & \text{om } X \text{ är diskret} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx & \text{om } X \text{ är kontinuerlig} \end{cases}$$

där vi sätter förut att $E[|g(X)|] < \infty$. För vissa funktioner g ges väntevärdet av den stokastiska variabeln $g(X)$ ett speciellt namn.

Definition (a) Väntevärdet $E\left[X^k\right]$ kallas det $k : e$ *momentet* av den stokastiska variabeln X, $k = 1, 2, \ldots$.

(b) Funktionen $t \mapsto M(t) = E\left[e^{tX}\right]$ kallas *momentgenererande funktion (m.g.f.)* av den stokastiska variabeln X.

Anmärkning Motiveringen för benämningen är Taylor-serien

$$E\left[e^{tX}\right] = 1 + t\, E[X] + \frac{t^2}{2!} E\left[X^2\right] + \frac{t^3}{3!} E\left[X^3\right] + \ldots$$

om den konvergerar på något lämpligt sätt.

Sats Antag att den stokastiska variabeln X har den m.g.f. M och ändliga moment $E\left[X^1\right], \ldots, E\left[X^n\right]$. Då gäller att

$$E\left[X^k\right] = M^{(k)}(0) \equiv \left.\frac{d^k}{dt^k} M(t)\right|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Bevis. *Steg 1* Låt $k = 1$. Det gäller att

$$E[X] = E\left[X \cdot e^{tX}\right]\Big|_{t=0} = E\left[\frac{d}{dt}\, e^{tX}\right]\Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, E\left[e^{tX}\right]\Bigg|_{t=0} = M'(0)\,.$$

Steg 2 Iteration ger för den $k : e$ derivatan

$$X^k = X^k \cdot e^{tX}\Big|_{t=0} = \left.\frac{d^k}{dt^k}\, e^{tX}\right|_{t=0}.$$

Alltså

$$E[X^k] = E\left[X^k \cdot e^{tX}\right]\Big|_{t=0} = E\left[\frac{d^k}{dt^k}\, e^{tX}\right]\Bigg|_{t=0} = \frac{d^k}{dt^k}\, E\left[e^{tX}\right]\Bigg|_{t=0} = M^{(k)}(0)\,.$$

Sats Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler med m.g.f. M_X och M_Y. Då gäller för $Z = X + Y$

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

för alla $t \in \mathbb{R}$, för vilka båda, $M_X(t)$ och $M_Y(t)$ existerar.

Bevis. Att X och Y är oberoende medför att också e^{tX} och e^{tY} är oberoende. Detta medför $E\left[e^{tX} \cdot e^{tY}\right] = E\left[e^{tX}\right] \cdot E\left[e^{tY}\right]$. Genom att använda definitionen får man

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX} \cdot e^{tY}\right] \\ &= E\left[e^{tX}\right] \cdot E\left[e^{tY}\right] = M_X(t) \cdot M_Y(t)\,. \end{aligned}$$

Anmärkning Resultatet kan generaliseras till ändliga summor

$$S = X_1 + \cdots X_n$$

av oberoende stokastiska variabler $X_1, \ldots, X_n$:

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_n}(t)$$

för alla $t \in \mathbb{R}$, för vilka $M_{X_1}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$ samtidigt existerar.

Sats (a) (Entydighet) Om $M(t)$ för alla t i något intervall är m.g.f. till någon stokastisk variabel X, så är fördelningen av X entydigt bestämt.

(b) (Konvergens) Låt $X_1, X_2, \ldots; X$ vara stokastiska variabler med m.g.f. $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots; M_X(t)$ för alla t i något intervall I. Om

$$M_{X_n}(t) \longrightarrow M_X(t)\,, \quad t \in I$$

då $n \to \infty$, så gäller för fördelningsfunktionerna $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \ldots; F_X(x)$

$$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$$

då $n \to \infty$, för alla $x \in \mathbb{R}$ där $F_X(x)$ är kontinuerlig.

Exempel Låt $X \sim Bin(n, p)$. Bestäm M_X, $E[X]$, $Var(X)$.
Svar:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^t\right)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(pe^t + 1 - p\right)^n \end{aligned}$$

där vi har använt Binomialsatsen. Vi får

$$M_X'(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

$$E[X] = M_X'(0) = np$$

$$M_X''(t) = n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2 + n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

$$E\left[X^2\right] = M_X''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)\,.$$

Exempel Låt $X \sim Exp(\lambda)$. Bestäm M_X, $E[X]$, $Var(X)$.
Svar:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] &= \int_0^\infty e^{tx}\,\lambda\,e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}\,, \quad t < \lambda. \end{aligned}$$

Således

$$M_X'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \quad \text{och} \quad M_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\,, \quad t < \lambda.$$

Vi får

$$E[X] = M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}\,, \quad E\left[X^2\right] = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}\,, \quad Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Exempel Låt $Z \sim N(0,1)$. Bestäm M_Z.
Svar:

$$\begin{aligned} M_Z(t) = E\left[e^{tZ}\right] &= \int_{-\infty}^\infty e^{tx}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\frac{x^2 - 2tx}{2}\right\}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right\}\,dx \\ &= e^{t^2/2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\,dx \\ &= e^{t^2/2} \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$ är täthetsfunktionen av $N(t,1)$.

Exempel Låt $X \sim N(\mu, \sigma)$. Bestäm M_X, $E[X]$, $Var(X)$.
Svar: Det gäller att

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \text{dvs. } X = \mu + \sigma Z.$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t(\mu + \sigma Z)}\right] \\ &= E\left[e^{t\mu}\cdot e^{t\sigma Z}\right] = e^{t\mu}\cdot E\left[e^{t\sigma Z}\right] = e^{t\mu}\cdot M_Z(t\sigma) \\ &= \exp\left\{\mu\cdot t + \frac{\sigma^2\,t^2}{2}\right\}\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alltså

$$\begin{aligned}
&E[X] = M_X'(0) = \mu \\
&E\left[X^2\right] = M_X''(0) = \sigma^2 + \mu^2 \\
&Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \sigma^2 .
\end{aligned}$$

Exempel Låt $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ och $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. Visa att

$$X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

Svar: Det gäller att

$$\begin{aligned}
M_{X_1+X_2}(t) &= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \\
&= \exp\left\{\mu_1 \cdot t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right\} \cdot \exp\left\{\mu_2 \cdot t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right\} \\
&= \exp\left\{(\mu_1 + \mu_2) \cdot t + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2}\right\} .
\end{aligned}$$

Detta är m.g.f. av $N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$ Det följer nu från entydighetssatsen att $X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.

Bevis av Centrala gränsvärdessatsen

Sats (Centrala gränsvärdessatsen) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med $ElX_i] = \mu$ och $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Det gäller att

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \Phi(a)\,, \quad a \in \mathbb{R},$$

där Φ betecknar fördelningsfunktionen för $N(0,1)$ och $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Bevis. Inför $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$. Då är

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X} - \mu\right) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}} .$$

Alltså

$$\begin{aligned}
M_{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) &= E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n t \cdot \frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right\}\right] \\
&= \prod_{i=1}^n E\left[\exp\left\{t \cdot \frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right\}\right] \\
&= \prod_{i=1}^n M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \qquad (1)
\end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att $Y_1, Y_2, \ldots$ är oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Låt oss utveckla Taylor-serien

$$\begin{aligned} M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= M_{Y_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} M'_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{2n} M''_{Y_1}(0) + O\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 \\ &= 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} E[Y_1] + \frac{t^2}{2n} E\left[Y_1^2\right] + O\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 . \end{aligned} \tag{2}$$

Ekvation (2) insatt i (1) ger

$$M_{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3\right)^n \longrightarrow e^{\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

då $n \to \infty$. Konvergenssatsen och entydighetssatsen medför nu Centrala gränsvärdessatsen.

Jörg-Uwe Löbus, `jorg-uwe.lobus@liu.se`