# Lektion 6

(1) Antag att

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,(x+y)e^{-(x+y)} & 0 < x, y < \infty \\ 0 & \text{annars} \end{cases} .$$

(a) Bestäm $c$ så att $f$ blir den simultana täthetsfunktionen av ett par $(X, Y)$ stokastiska variabler.

(b) Är $X$ och $Y$ oberoende?

(c) Beräkna sannolikheten $P(X > 2 | Y \leq 1)$.

(2) Variablerna $X$ och $Y$ har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x,y) = 6x(1-x)$$

för alla $(x, y)$ sådana att $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$, utanför denna kvadrat är $f(x, y) = 0$.

(a) Bestäm $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. Är $X$ och $Y$ oberoende?

(b) Beräkna $E[X - Y]$ och $Var(X - Y)$.

(c) Beräkna sannolikheten att $Y - X > 1/2$.

(3) Variablerna $X$ och $Y$ har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x,y) = k(x-y)$$

för alla $(x, y)$ sådana att $0 \leq y \leq x \leq 1$, annars $f(x, y) = 0$.

(a) Bestäm $k$.

(b) Bestäm $P(X > Y^2)$.

(4) Antag att

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq y < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

Visa att $f$ är den simultana täthetsfunktionen av ett par $(X, Y)$ stokastiska variabler. Beräkna $P(X + Y \geq 1)$. Är $X$ och $Y$ oberoende?

(5) Beräkna

$$\int\int_D xy^2\,dx\,dy, \text{ där } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 9 \text{ och } x \leq 0\right\} .$$

# Lösningar

(1) (a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy &= c\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(x+y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy \\
&= c\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy + c\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy \\
&= c\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy\,dx + c\int_0^{\infty} y\,e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,dy \\
&= 2c\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,dx \\
&= 2c\,,
\end{aligned}$$

som medför att $c = \frac{1}{2}$.

(b) Det gäller att

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x+y)e^{-(x+y)}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x\,e^{-(x+y)}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y\,e^{-(x+y)}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\,x\,e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy + \frac{1}{2}\,e^{-x}\int_0^{\infty} y\,e^{-y}\,dy \\
&= \frac{1}{2}(x+1)\,e^{-x}\,, \quad x > 0.
\end{aligned}$$

På samma sätt, $f_Y(y) = \frac{1}{2}(y+1)\,e^{-y}$, $y > 0$. Eftersom $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla $x, y > 0$ inte gäller, slumpvariablerna $X$ och $Y$ inte är oberoende.

(c)

$$\begin{aligned}
P(X > 2|Y \le 1) &= \frac{P(X > 2, Y \le 1)}{P(Y \le 1)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\int_2^{\infty}\int_0^1 (x+y)e^{-(x+y)}\,dy\,dx}{\frac{1}{2}\int_0^1 (y+1)\,e^{-y}\,dy} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\int_2^{\infty} x\,e^{-x}\,dx\int_0^1 e^{-y}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y\,e^{-y}\,dy\int_2^{\infty} e^{-x}\,dx}{-\frac{1}{2}y\,e^{-y} - e^{-y}|_0^1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(-x\,e^{-x} - e^{-x}|_2^{\infty})(1-e^{-1}) + \frac{1}{2}(-y\,e^{-y} - e^{-y}|_0^1)e^{-2}}{1 - \frac{3}{2}e^{-1}} \\
&= \frac{3e^{-2}(1-e^{-1})}{2-3e^{-1}} + \frac{(1-2e^{-1})e^{-2}}{2-3e^{-1}} \\
&= \frac{4e^{-2} - 5e^{-3}}{2-3e^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

(2) (a) $f_X(x) = 6x(1-x)$, $0 \le x \le 1$, och $f_Y(y) = 1$, $0 \le y \le 1$. $X$ och $Y$ är oberoende.

(b)

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\,dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot 1\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X-Y] = E[X] - E[Y] = 0\,.$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\, dx = \frac{3}{10} \qquad E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 1\, dy = \frac{1}{3}$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(-Y) = Var(X) + Var(Y)$$
$$= E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{2}{15}\,.$$

(c)

$$\begin{aligned}
P\left(Y - X > \frac{1}{2}\right) &= P\left(Y > \frac{1}{2} + X\right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}+x}^1 f(x,y)\, dy\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}+x}^1 6x(1-x)\, dy\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) 6x(1-x)\, dx \\
&= \frac{3}{32}\,.
\end{aligned}$$

(3) (a) Vi har att

$$\int_0^1 \int_0^x k(x-y)\, dy\, dx = \int_0^1 k\left[-\frac{(x-y)^2}{2}\right]_0^x dx = k\int_0^1 \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{k}{6}\,.$$

Så $k = 6$.

(b) $0 \leq Y \leq 1$ medför att $Y > Y^2$ och

$$P(X > Y^2) \geq P(X > Y)\,.$$

$$P(X > Y^2) = 1$$

fås från $P(X > Y) = 1$.

(4)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dydx = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-y}\, dy\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

Dessutom, $f \geq 0$. Således är $f$ en täthetsfunktion. Det gäller att

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_x^{\infty} e^{-y}\, dy = e^{-x}\,, \quad x > 0.$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_0^{y} e^{-y}\, dx = ye^{-y}\,, \quad y > 0.$$

Eftersom $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ inte gäller för alla $x, y > 0$, de stokastiska variablerna $X$ och $Y$ inte är oberoende. För $P(X+Y \geq 1)$ rita integrationsområdet.

$$\begin{aligned} P(X+Y \geq 1) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{1-x}^{\infty} e^{-y}\, dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \int_x^{\infty} e^{-y}\, dydx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(1-x)}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-x}\, dx \\ &= e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}\,. \end{aligned}$$

Alternativt visar man

$$\begin{aligned} P(X+Y \geq 1) &= 1 - P(X+Y \leq 1) \\ &= 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} e^{-y}\, dydx \\ &= 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{-x} - e^{-(1-x)}\right)\, dx \\ &= 1 - \left(1 - 2e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1}\right) \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}\,. \end{aligned}$$

(5) Linjärt byte $u = x$, $v = 2y$ med $dudv = 2dxdy$ och nytt område $E$: $1 \leq u^2 + v^2 \leq 9$, $u \leq 0$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med $dudv = \rho d\rho d\varphi$ och nytt område $F$: $1 \leq \rho \leq 3$, $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$, ger

$$\begin{aligned} \int\int_D xy^2\, dx\, dy &= \int\int_E u \left(\frac{v}{2}\right)^2 \frac{1}{2}\, du\, dv \\ &= \frac{1}{8}\int_1^3 \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi^2\, d\varphi\right) \rho^4\, d\rho \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_1^3 = \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{242}{5} = -\frac{121}{30}\,. \end{aligned}$$