TANA17 Matematiska beräkningar med Matlab

Laboration 1. Linjär Algebra och Avbildningar

Namn: ______________________________

Personnummer: ______________________________

Epost: ______________________________

Namn: ______________________________

Personnummer: ______________________________

Epost: ______________________________

Godkänd den: ____________________ Sign: ______________

Retur: ____

____

____

____

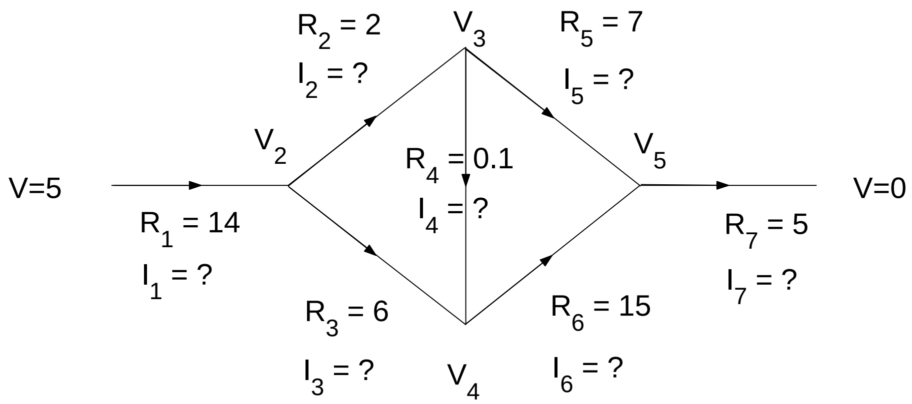
1 Introduktion

I denna övning skall vi träna på att använda Matlab för att utföra enklare beräkningar samt för att illustrera linjära avbildningar.

I de flesta fall skall både Matlabprogram och grafer redovisas. Enklast är därför att skriva de Matlab-kommandon som löser uppgiften i editorn. Då blir det enkelt att skriva ut det som skall redovisas efter att uppgiften är löst.

För att skriva ut Matlabprogram kan kommandot `a2ps` användas. Du använder då ett terminalfönster och skriver `a2ps *.m` så skrivs alla Matlab program i aktuell katalog ut till skrivaren.

2 En elektrisk krets



Figur 1: En enkel elektrisk krets.

I denna övning skall vi studera den enkla elektriska krets som syns i Figur 1. Innan en krets tillverkas testar man hur den kommer att fungera genom att utföra simuleringar. I detta fallet är man intresserad av att beräkna strömmar i kretsen. Vi gör detta genom att formulera ett linjärt ekvationssystem.

Resistanserna $R_1, \ldots, R_7$ är givna. Vi vill beräkna potentialer $V_2, \ldots, V_5$, och strömmar $I_1, \ldots, I_7$.

De fysikaliska lagar som styr kretsens beteende är Kirchhoff's lag, som föreskriver att summan av alla strömmar i varje nod är noll, och Ohm's lag som säger att skillnaden i potential mellan två noder är $V_a - V_b = R_{ab} \cdot I_{ab}$.

Uppgift 2.1 Använd Kirchhoff's lag och formulera en ekvation för strömmarna I_2, I_4 och I_5. Använd också Ohm's lag för att formulera en ekvation för storheterna V_3, V_4, I_4 och R_4. Är ekvationerna linjära?

Svar:____

Uppgift 2.2 Utgår vi från Kirchhoff's och Ohm's lagar får vi ett linjärt ekvationssystem, $Ax = b$, där de obekanta är

$$x = (V_2 , V_3 , V_4 , V_5 , I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6 , I_7)^T.$$

Matlabprogrammet `ElectricCircuit.m` beräknar matrisen och högerledet. Titta på matrisen. Varje rad motsvarar en ekvation. Vilka rader svarar mot de ekvationer du härledde ovan? Ange även matrisens storlek.

Svar:____

Uppgift 2.3 Lös ekvationssystemet $Ax = b$ med Matlab. Ange de beräknade värdena för potentialen V_4 och strömmen I_5?

Svar:____

3 Rotationer och Speglingar

Geometriska operationer som speglingar och vridningar har många tillämpningar inom exempelvis datorgrafik. I denna övning skall vi träna på att använda linjär algebra för att utföra sådana operationer på en enkel bild.

Vi börjar med att beskriva hur en rotation i (x, y)-planet kan gå till. Låt $P = (P_1 , P_2)^T$ representera en punkt i (x, y)-planet. Vill vi rotera punkten P kring origo $(0 , 0)^T$, med en given vinkel α, så kan vi beräkna,

$$P' = G \cdot P, \quad \text{där} \quad G = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Den roterade punkten P' får vi alltså genom multiplikation med den matris G som beskriver vridning i planet.

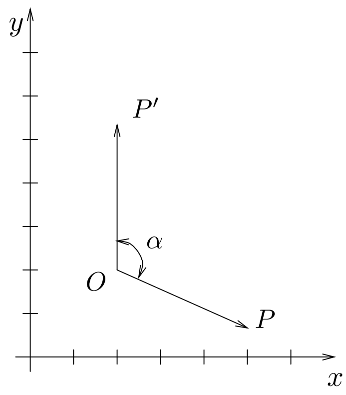
Vill vi istället välja ett annat origo $O = (O_1 , O_2)^T$ att rotera kring så bildar vi först vektorn $\vec{OP} = P - O$. Det är vektorn $\vec{OP}$ som skall roteras. Vi får då

$$P' = O + G \cdot (P - O).$$

där P, O och P' är punkter i (x, y)-planet. Rotationen illustreras i Figur 2.

Uppgift 3.1 Rotera punkten $P = (5, 1)^T$ kring origo $O = (2 , 2)^T$ så att den nya positionen efter rotationen blir $P' = (2, 5.16)^T$. Du skall alltså utföra precis den rotation som illustreras i Figur 2. Använd formeln

$$\vec{OP} \cdot \vec{OP'} = |\vec{OP}||\vec{OP'}| \cos(\alpha)$$



Figur 2: Rotation av punkten $P = (5\,,\,1)^T$, kring origo $O = (2\,,\,2)^T$, med en vinkel α. Efter rotationen fås den nya punkten $P' = (2\,,\,5.16)^T$.

för att hitta rätt vinkel. Rita en graf som illustretrar rotationen. Gick det som du tänkt dig? Vilken vinkel använde du? □

Svar:____

Tips För att plotta en linje som utgår ifrån $O = (2\,,\,2)^T$ till $P = (1\,,\,3)^T$ skriver vi `plot([O(1),P(1)],[O(2),P(2)],'b-');`. Du behöver inte redovisa grafen.

Uppgift 3.2 Filen `RitaHuset.m` innehåller de Matlab kommandon som behövs för att rita upp en enkel skiss bestående av ett hus, en man, och ett träd. Varje objekt på bilden består av en $2 \times n$ matris där varje kolumn motsvarar en hörnpunkt. Exempelvis gäller att

```
>> Gubbe(:,1)'
 ans =
    13     0
```

vilket skall tolkas som att mannens vänstra fot är placerad vid koordinater $(13\,,\,0)^T$. Notera att när vi ritar upp trädet så ritar vi först en grön heldragen linje och sedan en svart-streckad för att det skall synas lite bättre.

Vill vi flytta ett objekt i bilden, men i övrigt behålla objektet som det är, så skall vi addera en konstant vektor till varje hörnpunkt innan vi ritar upp bilden. Vill vi att mannen skall stå på taket så tittar vi på matrisen `Huset` och ser att om vänstra foten flyttas med $T = (4\,,\,4.5)^T$ så bör mannen stå nära högra kanten på taket.

Låt T vara en 2×1 vektor. Den yttre produkten

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \cdot (1\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,1) = \begin{pmatrix} T_1 & T_1 & \ldots & T_1 \\ T_2 & T_2 & \ldots & T_2 \end{pmatrix}$$

skapar en $2 \times n$ matris där varje kolumn innehåller en kopia av vektorn T. Detta kan utnyttjas för att förflytta alla punkterna i matrisen `Gubbe` med en konstant vektor. Skriv ner de Matlabkommandon du behöver för att genomföra förflyttningen. □

Svar: ____

Tips Du kan använda `size` för att ta reda på hur stor matrisen `Gubbe` är och `ones` för att skapa vektorn med ettor. Då du är klar så kommentera bort dina programrader så att gubben är tillbaka på marken.

Uppgift 3.3 Nu skall vi se till att trädet blåser omkull. I bilden ser vi att trädets vänstra hörn står vid punkter $O = (5.9\,,\,0)^T$. Inför ett nytt origo vid denna punkt. Skapa en vridningsmatris G och applicera den på punkterna i matrisen `Trad` (efter att ha flyttat origo). Välj vridningsvinkeln α så att trädet precis har slagit i marken. Ange de Matlabkommandon du behöver för att utföra vridningen. □

Svar: ____

Uppgift 3.4 Efter att trädet vält vore det mera naturligt om mannen pekade åt andra hållet. Om vi antar att mannen hört smällen och precis kommit ut genom dörren så måste han dessutom flyttas. Detta skall vi åstadkomma med en lämplig spegling.

Antag att vi vill spegla en punkt $P = (x\,,\,y)^T$ i y-axeln. Hur blir den matris H som beskriver speglingen? Vi skall alltså kunna beräkna den speglade punkten genom

$$P' = H \cdot P.$$

Ange matrisen H.

Svar: ____

Nästa steg är att välja ett lämpligt origo mellan dörren och gubben att använda vid speglingen. Utför de beräkningar som krävs för att genomföra speglingen av gubben. Ange det origo du valde. □

Svar: ____

Redovisa Skriv ut bilden med både vält träd samt en gubbe som pekar åt rätt håll.

Uppgift 3.5 (Frivillig) Antag att vi vill att trädet skall vara lite högre och dessutom luta aningen lite åt vänster (innan det blåst ner). Detta kan åstadkommas med en transformation av typen

$(x, y) \mapsto (x - \alpha y, \beta y)$, där ett värde $\alpha = 0.13$ ger en lagom lutning och $\beta = 1.1$ ger ett lite högre träd. Beskriv denna avbildning med en matris B. Vilket origo måste väljas för att avbildningen skall ge önskad effekt?

Svar: ____

Genomför beräkningarna för att ändra trädets höjd och lutning. Notera att nu måste även vridningsvinkeln ändras för att trädet precis skall slå i marken. □

Kommentar Ganska många operationer inom datorgrafik kan beskrivas med hjälp av linjär algebra. Man får då ett sätt att beskriva dessa operationer som lämpar sig väl för implementering på dator. De flesta operationer är en kombination av en linjär del (dvs en spegling eller rotation) och en konstant del som som uppkommer därför att man måste bestämma ett lämpligt origo kring vilken den linjära avbildningen skall verka.

4 Approximation av π

Det är känt att

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi.$$

Vi kan alltså hitta en approximation av π förutsatt att vi kan beräkna integralens värde. Vi skall implementera en metod att beräkna π som baseras på denna observation.

Uppgift 4.1 Implementera följande metod för att beräkna π i Matlab.

1. Dela in intervallet $[0, 1]$ i Nst delintervall.
2. Uppskatta integralens värde för varje delintervall genom att multiplicera funktionsvärdet i intervallets mittpunkt med delintervallets längd.

Då du är färdig skall du kunna beräkna en approximation av π vars noggrannhet beror på antalet delintervall som används, dvs på N. $\square$

Tips I Matlab finns en standard funktion `pi` som ger ett värde på π med ungefär 15 decimalers noggrannhet. Du kan använda denna för att hitta felet i din approximation.

Uppgift 4.2 Vi skall nu studera hur felet i den beräknade approximationen av π beror på antalet delintervall som används. Fyll i tabellen.

N	100	200	400	800
π				
$Felet$				

Vi antar att felet kan uttryckas som $C(1/N)^p$ för något heltal p. Utgå ifrån tabellen och bestäm heltalet p så bra som möjligt. Redovisa beräkningarna. $\square$

Svar:____

Redovisa Skriv ut och lämna in ditt Matlabprogram.