

TANA17 Matematiska beräkningar med MATLAB för M, DPU

Fredrik Berntsson, Linköpings Universitet

Föreläsning 6

- Minsta kvadrat problem.
- Polynom. Interpolation. Rötter.
- Tillämpningar: Cirkelpassning och analys av temperaturmätningar.

Minsta Kvadratproblemet

Exempel Vi vet att en fysikalisk storhet ges av

$$y = Ax_1 + Bx_2,$$

där A och B är konstanter vi vill bestämma och x_1 och x_2 är parametrar vi enkelt kan variera. Hur skall vi bestämma A och B ?

Lösning Genomför experiment och mät y för olika värden på (x_1, x_2) .

x_1	x_2	y
3.0	1.60	12.6
2.7	1.35	11.2
1.8	0.70	6.3
4.2	1.20	13.2

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3.0 & 1.60 \\ 2.7 & 1.35 \\ 1.8 & 0.70 \\ 4.2 & 1.20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.6 \\ 11.2 \\ 6.3 \\ 13.2 \end{pmatrix}$$

Nöjer vi oss med två mätningar får vi ett *linjärt ekvationssystem*. Fler mätningar bör gå att utnyttja för att få ett bättre resultat.

Euklidisk Längd

Den Euklidiska *normen* av en vektor x är

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

I Matlab finns funktionen `norm` som beräknar normen $\|x\|_2$.

I Matlab

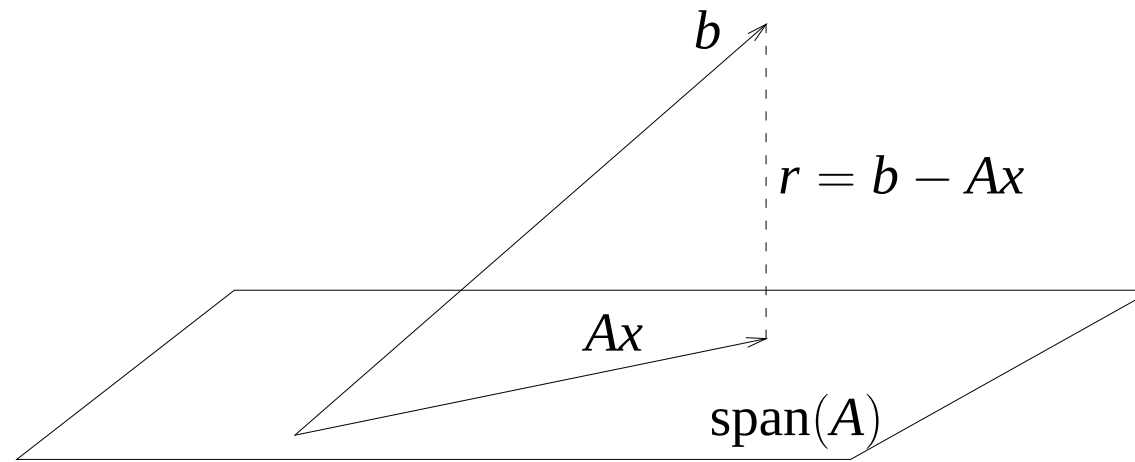
```
>> x = [ 1 3 -2 ]  
>> E = norm( x )  
E =  
3.7417
```

Definition Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m > n$. Ekvationssystemet $Ax = b$ är då *överbestämt*.

Fler ekvationer än obekanta gör att det oftast inte finns en lösning. Istället minimerar vi *residualen* och löser

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|.$$

Fallet $\|\cdot\|_2$ är trevligt eftersom det är enkelt att lösa. Kallas *Minsta kvadratproblemet*. I statistiken kallas det *Linjär Regression*.



Definiton Låt $Ax = b$ vara ett överbestämt ekvationssystem. Den vektor x som minimerar $\|Ax - b\|_2$ kallas *minsta kvadrat lösningen*.

Sats Minsta kvadrat lösningen x satisfierar *normalekvationerna*

$$A^T Ax = A^T b.$$

Om kolumnerna i A är linjärt oberoende så är $A^T A$ icke-singulär.

Exempel Lös Minstakvadrat problemet med A och b som tidigare

```
>> A = [ 3.0 1.60 ; 2.7 1.35 ; 1.8 0.70 ; 4.2 1.20];  
>> b = [12.6 11.2 6.3 13.2]';  
>> C=A'*A  
C =  
    37.1700    14.7450  
    14.7450     6.3125  
>> x_MK = C\ ( A'*b )  
x_MK =  
    1.8734  
    4.4208
```

Vi får *minsta kvadrat lösningen* $x = (1.873, 4.420)^T$.

Hade valt $x = (2, 4)^T$ och b med ett slumpmässigt fel.

I MATLAB tolkas $x=A\backslash b$ som ett minsta kvadrat problem om A är rektangulär. Det x som minimerar $\|Ax - b\|_2$ beräknas.

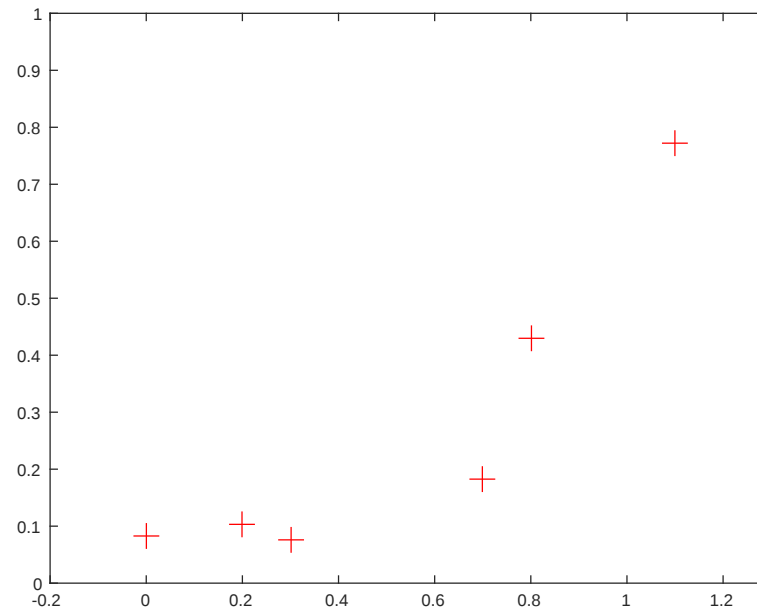
Exempel Med A och b som tidigare kan vi skriva

```
>> x = A\b
x =
    1.8734
    4.4208
```

Så snart A och b är definierade går det nästan alltid att skriva $A\backslash b$. Vad som beräknas beror på dimensioner hos A och b .

Modell Passning

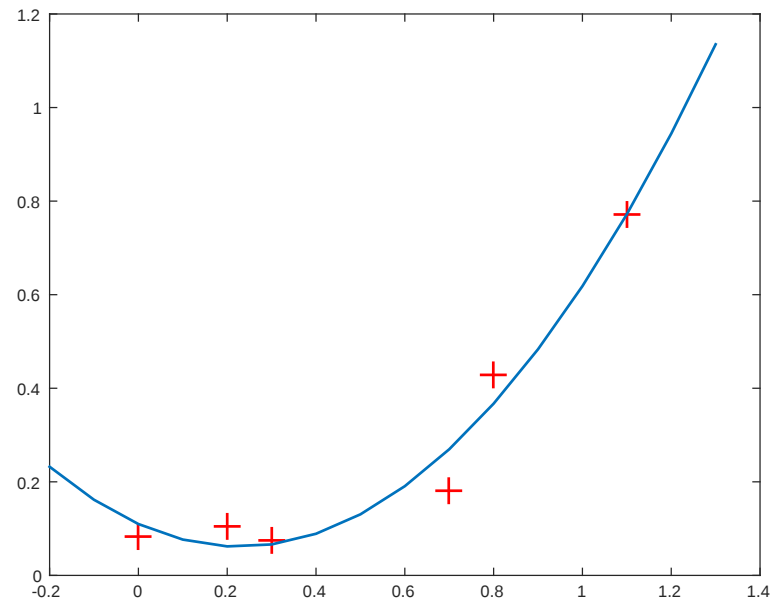
Exempel Vi vill anpassa ett polynom $p(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2$ till en uppsättning mätningar (t_i, y_i) , $1 \leq i \leq m$.



Formulera detta som ett överbestämt ekvationssystem och lös med minsta kvadratmetoden.

Lösning Antag att data (t_i, y_i) lagrats som två vektorer t och x . Då fås

```
>> A=[ t.^0 t.^1 t.^2]; b=y; c= A\b;x  
>> tt=0:0.1:2;yy=c(1)+c(2)*tt+c(3)*tt.^2;  
>> plot(t,y,'r+',tt,yy);
```



Vi får en vektor

```
>> c'  
ans =  
    0.0400   -0.1073    0.7112
```

Funktionen `polyfit` beräknar ett polynom $p(t)$ som approximerar punkterna (t_i, y_i) enligt minsta kvadrat metoden.

Skriver vi i Matlab fönstret

```
>> P = polyfit( t , y , 2 )  
P =  
    0.7112    -0.1073    0.0400
```

så beräknas koefficienterna $(c_1, c_2, c_3)^T$ för det andrags polynom som bäst approximerar punkterna (t_i, y_i) .

Funktionen `polyval` beräknar polynomets värden för ett antal t värden.

Skriver vi i Matlab fönstret

```
>> y = polyval( P , t );
```

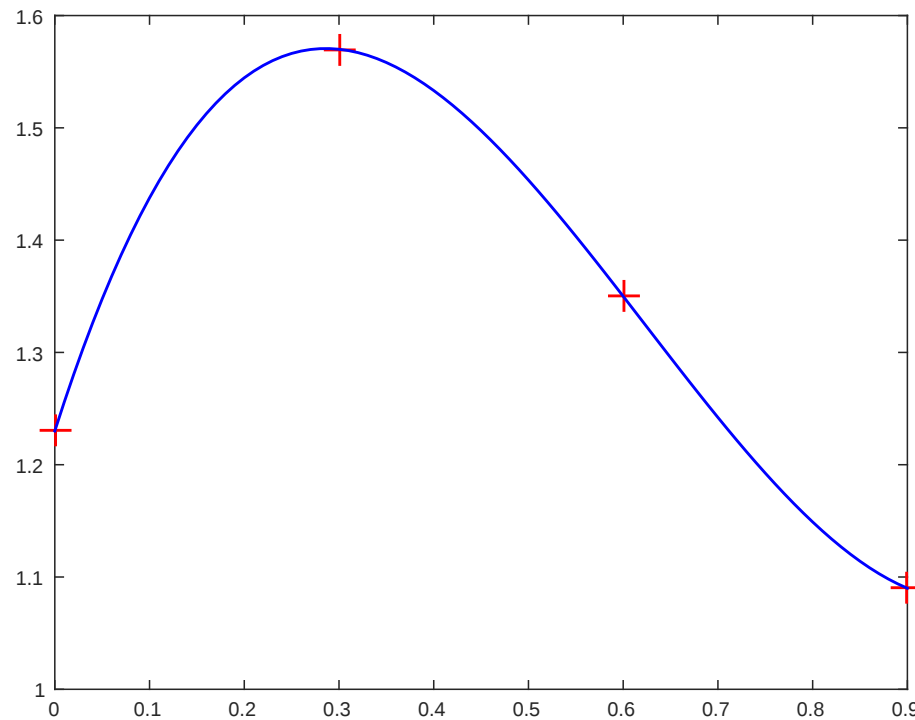
så beräknas en vektor y sådan att $y_i = p(t_i)$.

Exempel Hitta det polynom som interpolerar punkterna Hitta ett polynom $p_n(x)$ som interpolerar värdena i tabellen

x	0.0	0.3	0.6	0.9
$f(x)$	1.23	1.57	1.35	1.09

Plotta polynomet $p(x)$ tillsammans med punkterna $(x_i, f(x_i))$ i en graf.

Lemma Ett polynom $p_n(x)$, av gradtal n , blir entydigt bestämt om vi anger $(n + 1)$ *interpolations villkor* $p_n(x_i) = y_i$.



I Matlab skriver vi

```
>> x=0:0.3:0.9; y=[1.23 1.57 1.35 1.09];  
>> p3=polyfit(x,y,3)  
p3 =  
    3.2099    -6.0000    2.6444    1.2300  
>> xx=0:0.01:0.9;  
>> plot(x,y,'r+',xx,polyval(p3,xx),'b-')
```

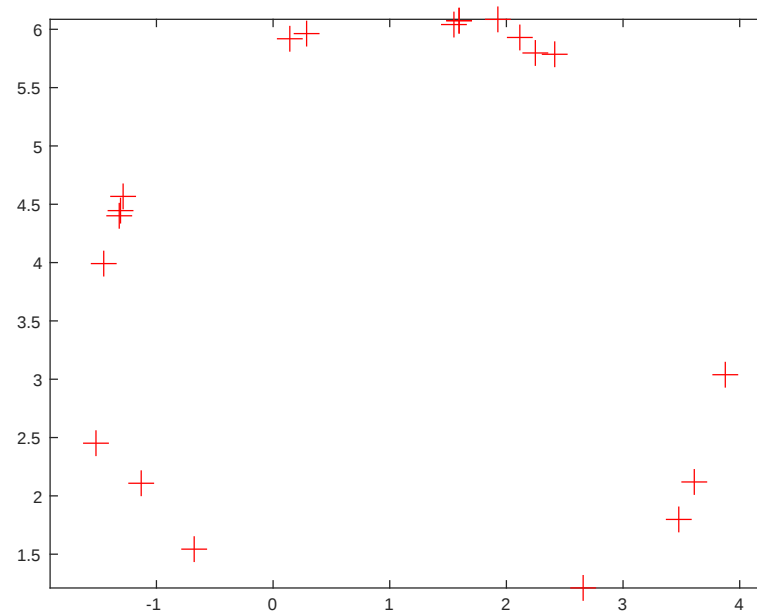
Funktionen `roots` hittar alla rötter till ett polynom med coefficienter $c = (c_{n-1}, \dots, c_0)$.

Exempel Hitta rötterna till polynomet $p(x) = 1.2 - 2.0x + 1.7x^2 - 0.2x^3$. I Matlab skriver vi

```
>> r = roots( [ -0.2 1.7 -2.0 1.2 ] ); r'  
ans =  
    7.2320+0.0000i    0.6340-0.6540i    0.6340+0.6540i  
>>  
>> polyval( [ -0.2 1.7 -2.0 1.2 ] , r(1) )  
ans =  
    3.0198e-14
```

Vi har hittat en rot!

Exempel Vi har ett antal punkter (x_k, y_k) som borde ligga på en cirkel.



Hur kan vi använda *Minstakvadrat metoden* för att uppskatta centrum och radie för cirkeln?

Lösning Varje punkt $(x, y)^T$ på cirkeln uppfyller ekvationen

$$F(u) = a(x^2 + y^2) + b_1x + b_2y + 1 = 0,$$

där $u = (a, b_1, b_2)^T$ är okända parametrar.

Centrum och radie för cirkeln ges av

$$z = (x_0, y_0)^T = -\left(\frac{b_1}{2a}, \frac{b_2}{2a}\right)^T, \quad \text{och,} \quad r^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2}{4a^2} - \frac{1}{a}.$$

Vi behöver två funktioner

1. Givet x och y beräkna u :

```
function [u]=CircleFit( x , y )
```

2. Givet u beräkna z och r samt plotta cirkeln:

```
function [z,r]=DisplayCircle( u )
```

På filen `CircleFit.m` skriver vi

```
% Hitta parameter vektor u som beskriver en cirkel  
% vektorerna x och y.  
%  
function [u]=CircleFit( x , y )  
  
    A=[x.^2+y.^2 x y];b=-ones(length(x),1);  
    u=A\b;  
end
```

Vi använder funktioner på våra data vektorer `x` och `y` och får

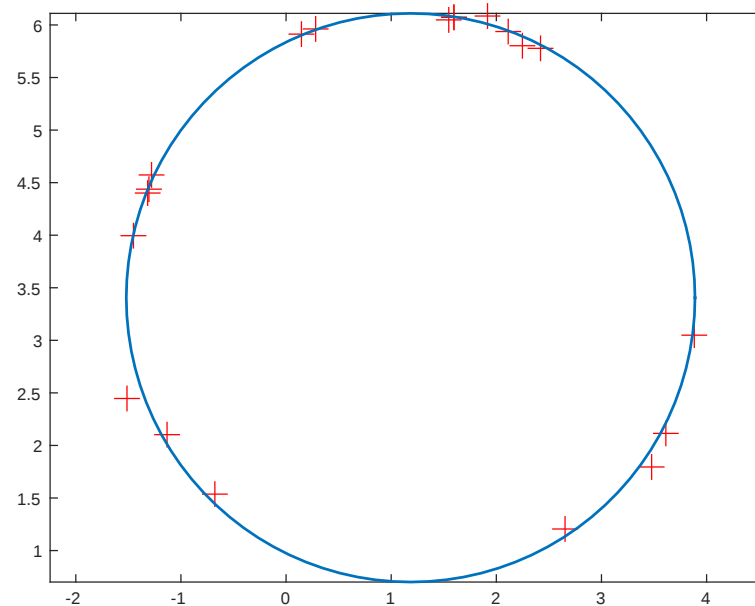
```
>> u=CircleFit( x , y)  
u =  
    0.1729  
   -0.4113  
   -1.1799
```

På filen `DisplayCircle.m` skriver vi

```
% Beräkna centrum och radie samt rita upp cirke  
% parameter vektorn u.  
%  
function [z,r]=DisplayCircle( u )  
  
    z=-u(2:3)/2/u(1)  
    r=sqrt( (u(2)^2+u(3)^2)/4/u(1)^2-1/u(1));  
  
    theta=2*pi*(0:99)'/100;  
    x=z(1)+r*cos(theta);y=z(2)+r*sin(theta);  
    x=[x;x(1)];y=[y;y(1)];  
    plot(x,y);  
end
```

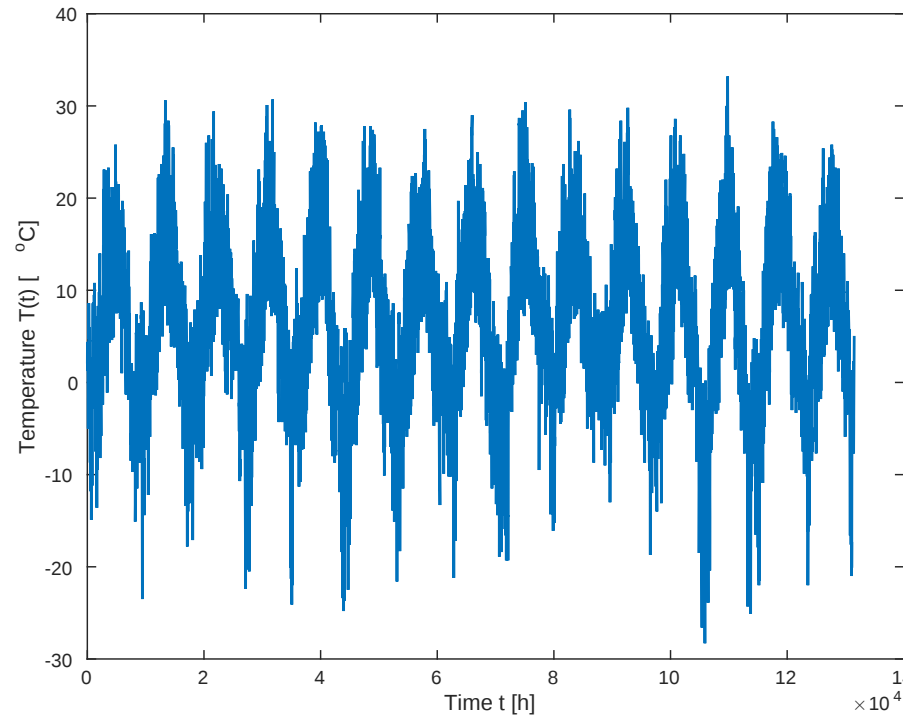
Vi använder nu funktionen för att rita cirkeln

```
>> hold on , [z,r]=DisplayCircle( u ); hold off
```



Vi fick $z = (1.1898, 3.4131)^T$ och $r = 2.6981$. Hade valt $z_0 = (1.2, 3.4)^T$ och $r = 2.7$.

Tillämpning: Analys av Temperaturmätningar



Data Uppmätt temperatur varje timme vid mätstation Malmslätt mellan 1998 och 2012.

Frågor Vi vill undersöka hur temperaturen utvecklar sig över åren samt bygga en modell för temperaturen $T(t)$. Detta är av intresse exempelvis då bönder vill försäkra sig mot frost skador.

Matematisk modell Vi antar att temperaturen kan beskrivas som

$$T(t) \approx M(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin(\omega(t - \tau)),$$

där $\omega = 2\pi/(365 \cdot 24)$ så att vi får en period på precis ett år.

Parametern τ anpassas så att varmaste, respektive kallaste dagar, hamnar på rätt plats i modellen.

Uppgift Vad behöver göras för att hitta bra värden c_1 , c_2 , c_3 , och τ ?

På filen `TempFit.m` skriver vi

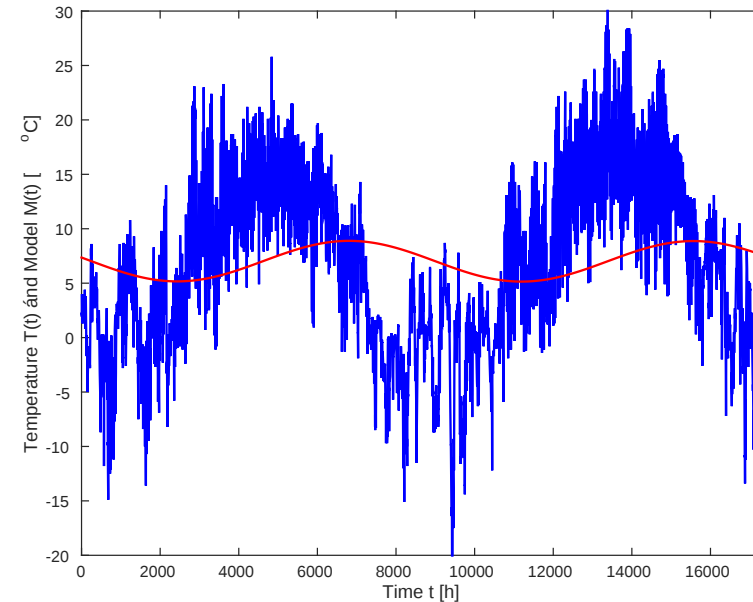
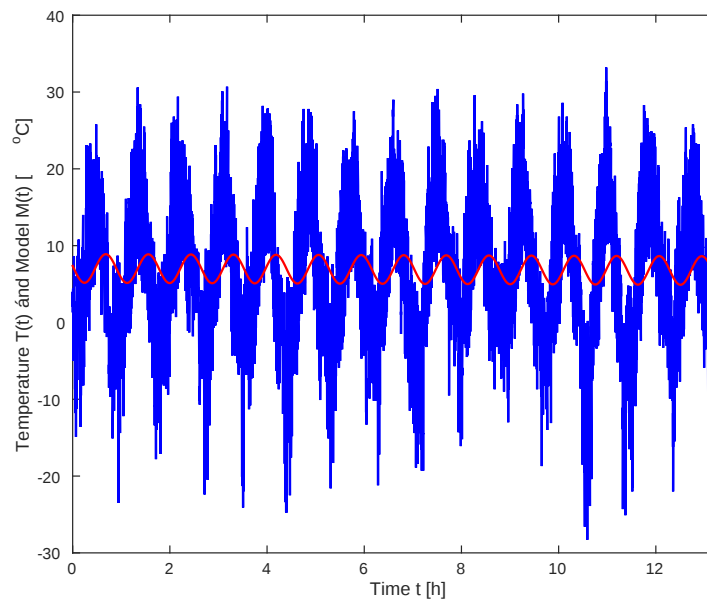
```
function [c,M]=TempFit( t , T , Omega , Tau )

% Modellen är  $T(t)=c_1+c_2*t+c_3*\sin( \text{Omega}*(t-\text{Tau}) )$ 

A=[t.^0 t.^1 sin( Omega*(t-Tau) )]; b=T;
c=A\b;
M=c(1)+c(2)*t+c(3)*sin( Omega*(t-Tau) );
end
```

Vi kan nu lösa minsta kvadrat problemet för ett givna värden på ω och τ . I Matlab

```
>> Omega = 2*pi/365/24; Tau = 10*24;
>> [c,M]=TempFit( t , T , Omega , Tau );
>> plot( t,T,'b-',t,M,'r-' )
```



Resultat Med $\tau = 10$ dagar fås en dålig approximation. Vi får

```
>> norm( T - M )
ans =
    2.9597e+03
```

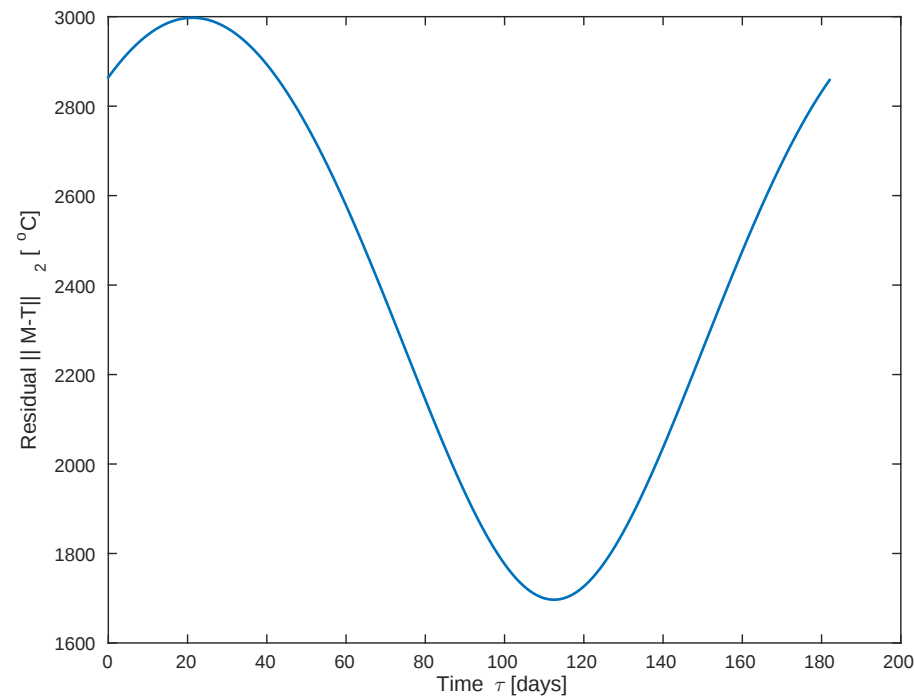
Uppgift Välj τ så att skillnaden $\|T - M\|_2$ minimeras. Rita ett flödesschema för programmet.

På filen `TemperatureExperiment.m` skriver vi

```
Omega=2*pi/(365*24);    % Period på precis ett år.
Tau=[0:182]*24;
Residualer=zeros(size(Tau));

for i=1:length(Tau)
    [c,M]=TempFit( t , T , Omega , Tau(i) );
    Residualer(i)=norm(T-M);;
end;

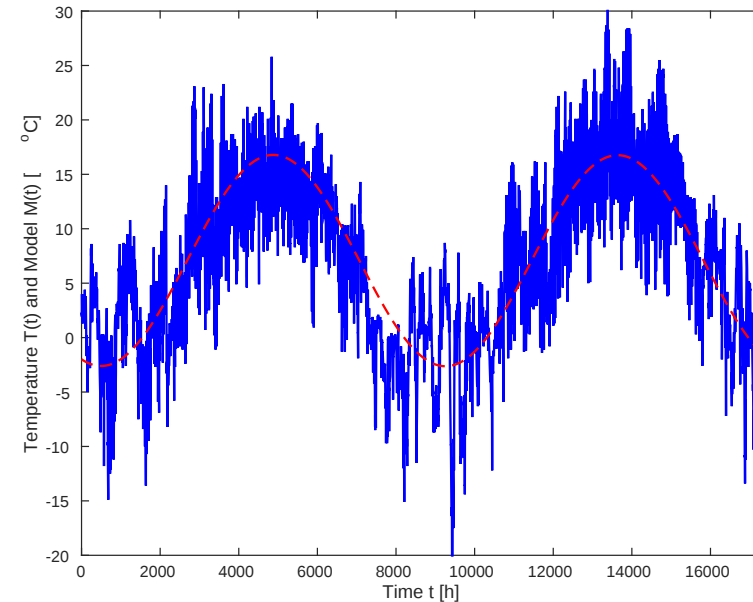
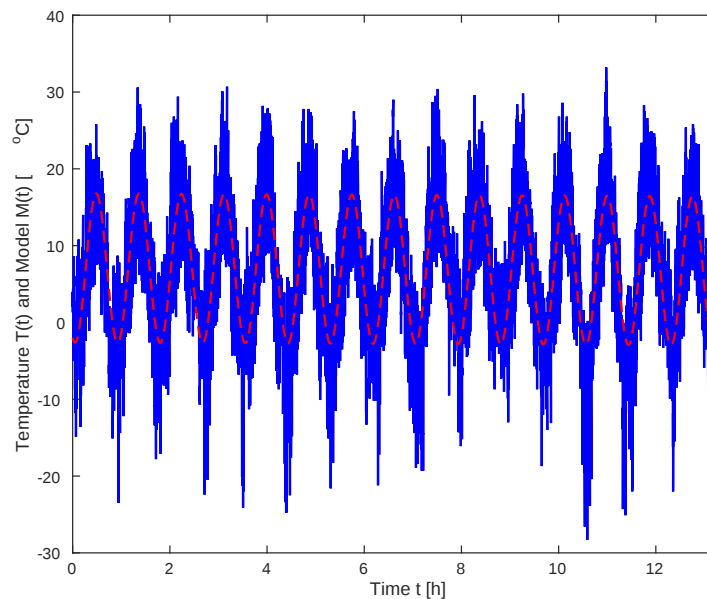
plot( Tau/24,Residualer)
xlabel('Time \tau [days]');
ylabel('Residual || M-T||_2 [ ^oC]');
```



Figur Residualerna $\|T - M\|_2$ som funktion av τ . Minimum fås för

```
>> [MinRes, k]=min(Residualer); Tau(k)/24  
ans =  
112
```

Bäst är alltså att skifta med 112 dagar.



Resultat Med $\tau = 112$ dagar fås en bra approximation. Vi får

```
>> norm( T - M )
ans =
    1.6967e+03
```

Frågor Finns det någon långsiktig temperaturökning? När inträffar kallaste dagen ungefär?

Svar Den långsiktiga temperaturökningen bestäms av c_2 . Vi får

```
>> c(2)*365*24  
ans =  
-0.0243
```

och temperaturen minskar alltså med ungefär 0.02 grader/år i genomsnitt.

Svar Med en period på 365 dagar och skift $\tau = 112$ inträffar kallasta dagen vid

```
>> t = 112 - 365/4  
t =  
20.7500
```

Alltså omkring 21:a Januari varje år.