

TANA17 Matematiska beräkningar med Matlab

Datorlektion 5. Minsta kvadrat problem

1 Polynom

Uppgift 1.1 Hitta ett polynom $p(x)$ som interpolerar tabellen följande tabell

x	0.4	0.6	0.7
y	0.571	0.643	0.668

Vilket gradtal skall väljas? Plotta både punkterna (x, y) och polynomet i samma graf. $\square$

Tips Använd `polyfit` och `polyval`.

Uppgift 1.2 Anpassa ett förstgradspolynom så bra som möjligt till tabellen

x	0.2	0.3	0.5	0.8
y	0.231	0.352	0.618	0.934

Plotta både punkterna (x, y) och polynomet i samma graf. $\square$

Uppgift 1.3 Anpassa ett andragradspolynom så bra som möjligt till tabellen

x	0.1	0.4	0.8	1.3	1.7
y	1.82	2.10	2.48	2.73	2.91

Plotta både punkterna (x, y) och polynomet i samma graf. $\square$

Uppgift 1.4 Hitta ett tredjegrads polynom med nollställen $x_1 = 0.7$, $x_2 = 1.8$ och $x_3 = 2.9$ genom att interpolera följande tabell

x	0.0	0.7	1.8	2.9
y	1.0	0.0	0.0	0.0

Plotta dessutom polynomet på intervallet $0 \leq x \leq 3$. $\square$

Tips Använd `roots` för att verifiera att polynomet fått rätt nollställen.

Uppgift 1.5 Använd `roots` för att hitta alla noll-ställen till polynomet $p(x) = 3 - 2x + 0.3x^2 - x^4$.
□

Uppgift 1.6 (Svår) Om polynomet $p_n(x)$ uttrycks som

$$p_n(x) = c_1x^n + c_2x^{n-1} + \dots + c_{n+1},$$

och representeras av en vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1})^T$. Då kan vi derivera polynomet termvis och får ett nytt polynom $g(x)$ som representeras av vektorn $d = (nc_1, (n-1)c_2, \dots, c_n)^T$.

Skriv en funktion `PolyDeriv` med vektorn c som inparameter och motsvarande vektor d som utparameter.

Använd funktionen för att derivera polynomet $p(x) = 3 - 2x - 1.5x^2 + 0.5x^4$. Plotta både polynomet $p(x)$ och dess derivata i samma graf. □

Tips Du skall kunna använda `polyval` för att beräkna både polynomets, och derivatans, värden. Matlab funktionen `polyder` deriverar polynom. Du kan använda den för att kontrollera att din funktion är korrekt.

2 Överbestämda ekvationssystem

Uppgift 2.1 Lös det överbestämda ekvationssystemet $Ax = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.3 \\ -2.3 & 1.2 \\ 4.5 & 3.4 \\ 2.0 & 1.6 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} 1.6 \\ -0.4 \\ 1.3 \\ 2.3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Uppgift 2.2 Ett plan i $\mathbb{R}^3$ spänns upp av de två vektorerna $v_1 = (-1, 0, 1)$ och $v_2 = (1, 1, 0)$. Det betyder att alla punkter som tillhör planet kan skrivas som $v_1x_1 + v_2x_2$. Antag att vi har en vektor $b = (3, -2, 5)^T$ som inte ligger i planet. Hitta den vektor y , i planet, som ligger närmast b .
□

Uppgift 2.3 Vi har två linjer i $\mathbb{R}^3$ som kan parametriseras

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad P_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Hitta det minsta avståndet mellan två punkter på linjerna. Dvs minimera $\|P_1(t_1) - P_2(t_2)\|_2$. Formulera problemet som ett minsta kvadrat problem. □

Uppgift 2.4 Vi har ett antal mätningar

x	0.1	0.4	0.8	1.3	1.7
y	1.82	2.10	2.48	2.73	2.91

som antas kunna förklaras med modellen $y = p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$. Formulera det överbestäm-
da ekvationssystem som uppstår då man vill bestämma $c = (c_1, c_2, c_3)^T$ med hjälp av minsta
kvadrat metoden. Lös även problemet och plotta både punkterna och andragradspolynomet i sam-
ma figur. $\square$

Uppgift 2.5 Skapa ett lämpligt test problem genom att skriva

```
>> t = (0:0.1:5)';  
>> y = 1.3+0.15*t+0.74*sin(4*t)+randn(size(t))/8;
```

Använd sedan Minsta kvadrat metoden för att bestämma parametrarna i modellen

$$f(t) = c_1 + c_2t + c_3 \sin(4t).$$

Plotta även både punkterna (t_i, y_i) och funktionen $f(t)$ i samma graf. $\square$

Kommentar Då vi skapat punkterna utgående ifrån modellen, men med ett litet slumpmässigt fel,
bör Minsta kvadrat metoden ge ungefär de parametervärden vi startade med.

Uppgift 2.6 Under ett experiment värms en stålbit i en ugn. Stålbitens temperatur mäts vid några
olika tidpunkter och följande tabell erhålls

t	0	10	20	30	40
$T(t)$	20.9	92.1	132.2	158.4	176.2

Ungnens temperatur är 200°C . Teoretiska beräkningar antyder att modellen,

$$T(t) = 200 \cdot (1 - \alpha e^{-\beta t})$$

kan användas för att beskriva sambandet mellan temperatur T och tid t .

Inför hjälpfunktionen $f(t) = \log(200 - T(t))$ och formulera det överbestämde ekvationssystem som
fås om man använder minsta kvadratmetoden för att anpassa en rät linje, $P(t) = c_0 + c_1t$, så
bra som möjligt till de givna tabellvärdena $(t_i, f(t_i))$.

Lös problemet med Minsta kvadrat metoden och bestäm lämpliga värden på parametrarna c_0 och
 c_1 . Bestäm sedan motsvarande parameter värden α och β i modellen ovan och plotta punkterna
 $(t_i, T(t_i))$ och modellen $T(t)$ i samma figur. $\square$

TANA17 Matematiska beräkningar med Matlab

Facit till Datorlektion 5.

1 Polynom

Uppgift 1.1 I Matlab skriver vi

```
>> x=[ 0.4 0.6 0.7 ]; y=[0.571 0.643 0.668];  
>> p2=polyfit(x,y,2);  
>> xx=0.4:0.01:0.7;  
>> plot(x,y,'r+',xx,polyval(p2,xx),'b-');
```

Uppgift 1.2 Vi skriver kommandona

```
>> x=[0.2 0.3 0.5 0.8]; y=[0.231 0.352 0.618 0.934];  
>> p1=polyfit(x,y,1);  
>> plot(x,y,'r+',x,polyval(p1,x),'b-')
```

Notera att då vi skall plotta en rät linje $p_1(x)$ behöver vi inte en vektor med "tätare" x -värden.

Uppgift 1.3 Vi skriver kommandona

```
>> x=[0.1 0.4 0.8 1.3 1.7]; y=[1.82 2.10 2.48 2.73 2.91];  
>> p2=polyfit(x,y,2);  
>> xx=0:0.01:2;  
>> plot(x,y,'r+',xx,polyval(p2,xx),'b-')
```

Uppgift 1.4 Vi skapar polynomet med kommandona

```
>> x=[0 0.7 1.8 2.9]; y=[1 0 0 0];  
>> p3=polyfit(x,y,3);  
>> xx=0:0.01:3;  
>> plot(xx,polyval(p3,xx))
```

Vi ser att kurvan skär x -axeln vid rätt ställen. Vi kan även skriva `roots(p3)` för att verifiera detta.

Uppgift 1.5 Vi skriver

```
>> roots([-1 0 0.3 -2 3])
```

Vi får 4 rötter varav två blir komplexa.

Uppgift 1.6 På filen PolyDeriv.m skriver vi

```
function [d]=PolyDeriv(c)
    n=length(c)-1;          % Polynometsgradtal
    d=zeros(n,1);          % konstanttermen försvinner

    for i=1:n
        d(i)=(n-i+1)*c(i);
    end
end
```

För att derivera $p(x) = 3 - 2x - 1.5x^2 + 0.5x^4$ skriver vi

```
>> d = PolyDeriv( [0.5 0 -1.5 -2 3] ); d'
ans =
     2     0    -3    -2
```

Vilket motsvarar polynomet $g(x) = 2x^3 - 3x - 2$. Matlabs polyder ger samma resultat.

2 Överbestämda ekvationssystem

Uppgift 2.1 I Matlab skriver vi

```
>> A=[ 1.2 2.3 ; -2.3 1.2 ; 4.5 3.4 ; 2.0 1.6];
>> b=[1.6 ; -0.4 ; 1.3 ; 2.3 ];
>> x=A\b;    x'
ans =
    0.2241    0.3432
```

Uppgift 2.2 Vi bildar en matris $A = (v_1, v_2)$. Då kan varje vektor i planet skrivas som $y = Ax$. Vi får alltså ett minsta kvadrat problem som löses i Matlab med

```
>> v1=[-1 0 1]'; v2=[1 1 0]'; A=[v1,v2];
>> b=[3 -2 5]';
>> x=A\b;    x'
ans =
    1.6667    1.3333
```

Den närmsta punkten blir sedan $y = Ax$ som beräknas enligt

```
>> y=A*x;    y'
ans =
   -0.3333    1.3333    1.6667
```

Uppgift 2.3 Vi skriver problemet som

$$P_1(t_1) - P_2(t_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså ett överbestämt ekvationssystem att lösa. I Matlab

```
>> z1=[1 0 0]';v1=[-1 1 2]';
>> z2=[-1 2 1]';v2=[1 -1 0]';
>> A=[v1 -v2];b=z2-z1;
>> t=A\b
```

Vilket ger $(t_1, t_2) = (0.5, 1.5)^T$ och punkterna

```
>> P1=z1+t(1)*v1; P1'
ans =
    0.5000    0.5000    1.0000
>> P2=z2+t(2)*v2; P2'
ans =
    0.5000    0.5000    1.0000
>> norm( P1-P2 )
ans =
    0
```

Linjerna skär alltså varandra i punkter $(0.5, 0.5, 1)$ så minsta avståndet är noll.

Uppgift 2.4 I Matlab skriver vi

```
>> x=[0.1 0.4 0.8 1.3 1.7]';
>> y=[1.82 2.10 2.48 2.73 2.91]';
>> A=[ ones(size(x)) x x.^2 ]; b=y;
>> c=A\b;
>> xx=0:0.01:2;yy=c(1)+c(2)*xx+c(3)*xx.^2;
>> plot(x,y,'r+',xx,yy,'b-')
```

Uppgift 2.5 I Matlab skriver vi

```
>> t = (0:0.1:5)';
>> y = 1.3+0.15*t+0.74*sin(4*t)+randn(size(t))/8;
>> A=[ ones(size(t)) t sin(4*t)];b=y;
>> c=A\b; c'
ans =
    1.3921    0.1266    0.7130
>> plot( t , y , 'r-',t,c(1)+c(2)*t+c(3)*sin(4*t) , 'b-')
```

Uppgift 2.6 I Matlab skriver vi

```
>> t = (0:10:40)';
>> T = [20.9 92.1 132.2 158.4 176.2]';
>> F = log( 200 - T );
>> A=[ t.^0 t ]; c=A\F; c'
ans =
    5.1946   -0.0499
```

För att modellen skall stämma så blir

$$\log(T - 200) = \log(\alpha) - \beta t.$$

Alltså $\beta = -c_2$ och $200\alpha = e^{c_1}$. Vi kan alltså plotta data och modell i Matlab genom

```
>> beta=-c(2); alpha=exp(c(1))/200;
>> tt=0:0.1:40; M=200*(1-alpha*exp(-beta*tt));
>> plot( t,T,'r+',tt,M,'b-')
```