

Projekt 3. Beskrivning av geometri med Beziérkurvor

1 Introduktion

Inom design har man behov av effektiva sätt att beskriva kurvor och ytor med matematiska funktioner som är lätta att arbeta med. Ett av de vanligaste kallas Beziér kurvor och introducerades ursprungligen inom bilindustrin. De flesta verktyg för grafisk design innehåller funktioner för att hantera Beziér kurvor eller ytor.

En av de allra vanligaste tillämpningarna är design av fonter. Enskilda bokstäver har en standardiserad form som måste beskrivas matematiskt för att det skall vara enkelt att generera bokstäver i olika storlek eller upplösning.

Design av ett font paket innebär att en konstnär ritar den önskade formen på varje bokstav. Varje kurvstycke beskrivs sedan matematiskt på ett sådant sätt att det blir enkelt att generera pixelbilder som föreställer bokstaven. Hela proceduren beskrivs på ett bra sätt i boken *The Metafont book*, av Donald E. Knuth (som även skrivit typsättningssystemet TeX). I detta projekt skall vi använda Beziér kurvor för att designa bokstaven *d*.

1.1 Beziérkurvor

En kubisk Beziér kurva definieras utifrån 4 *styrpunkter*, $P_1, \dots, P_4$ i $\mathbb{R}^2$. Vi inför en lokal parameter t och utgår ifrån identiteten

$$1 = 1^3 = (1 - t + t)^3 = (1 - t)^3 + 3(1 - t)^2t + 3(1 - t)t^2 + t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Vi har alltså fyra stycken positiva vikter som summerar till 1. Inför vi Beziér kurvan som ett polynom

$$p(t) = (1 - t)^3 P_1 + 3(1 - t)^2 t P_2 + 3(1 - t) t^2 P_3 + t^3 P_4, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

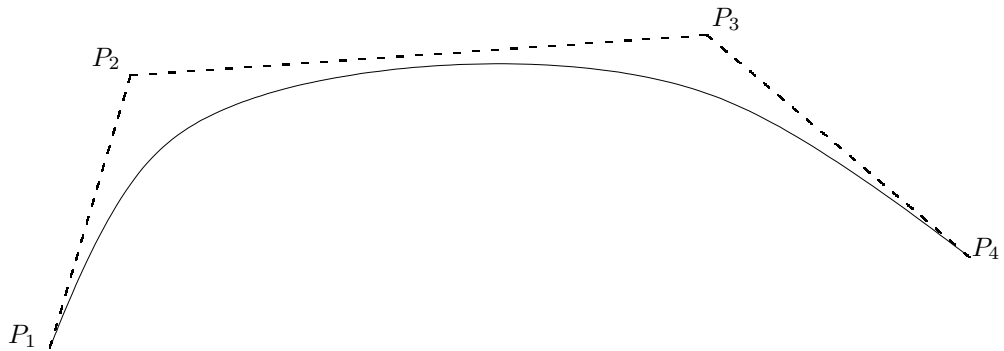
Så kommer varje punkt $p(t)$ vara ett viktat medelvärde av punkterna $P_1, \dots, P_4$. Dessutom gäller att

$$p(0) = P_1, \text{ och } p(1) = P_4.$$

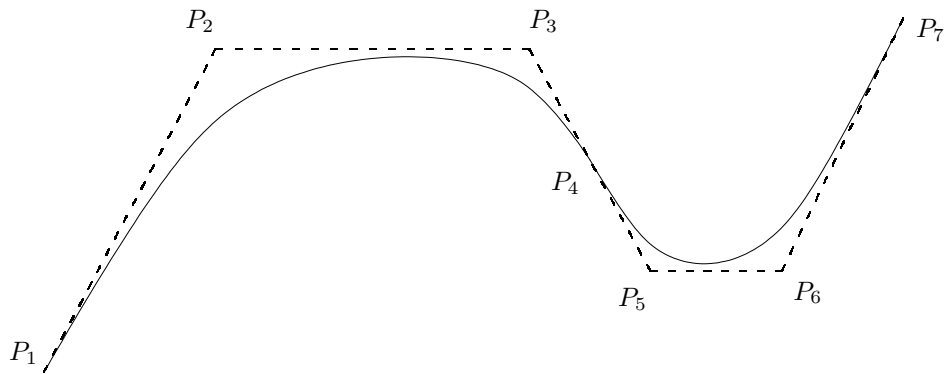
Deriverar vi polynomet $p(t)$ så ser vi även att tangent riktningen i start respektive slutpunkt blir

$$p'(0) = 3(P_2 - P_1), \text{ och } p'(1) = 3(P_4 - P_3).$$

Dessa egenskaper gör det lätt att designa en kurva med lämpligt utseende. See Figur 1 för ett exempel på hur ett kurvstycke kan se ut. Mera komplicerade kurvor skapas genom att flera Kubiska Beziér kurvor sammanfogas på ett sådant sätt att hela kurvan får önskade egenskaper, see Figur 2 för ett exempel.

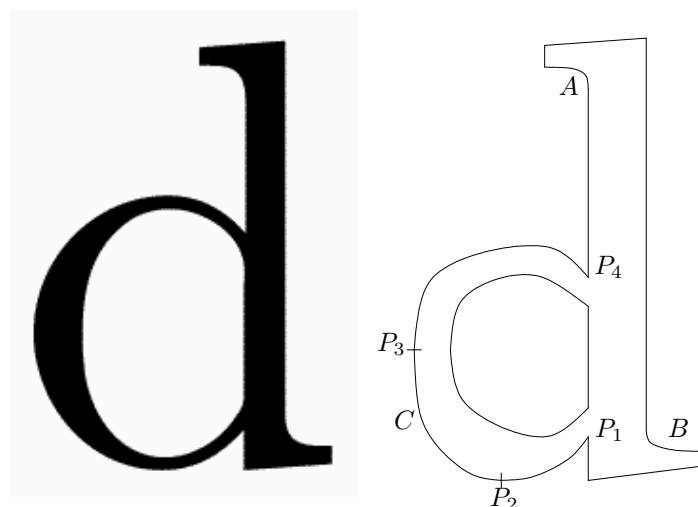


Figur 1: En kubisk Beziér kurva som definierats av 4 styrpunkter.



Figur 2: Två kubiska Beziér kurvor som ges av styripunkter $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ respektive $\{P_4, P_5, P_6, P_7\}$. Interpolationspunkten P_4 är *gemensam*. Villkoret $P_4 - P_3 = P_5 - P_4$ garanterar att kurvans tangent är kontinuerlig.

1.2 Font design



Figur 3: Bokstaven *d* genererad från en vektoriserad font. Bokstavens konturlinje består av linjesegment och Beziér kurvor. Ett exempel på hur interpolationspunkter kan införas visas till vänster.

Fonten *Computer modern* är designad just med kubiska Beziér kurvor. Ett exempel på en bokstav finns i Figur 3.

Målet med projektet är att hitta lämpliga interpolations- och styrpunkter för att ge bokstaven *d* den form den har i bilden. Dela in varje krökt kurvsegment i lämpliga delar som går att beskriva med en Beziér kurva. För varje del skall styrpunkter väljas så att kurvan får kontinuerlig tangenriktning i interpolationspunkterna.

Då vi har hittat alla styrpunkter som behövs för att definiera bokstaven kan vi enkelt rita upp formen. De flesta font paket innehåller dessutom alternativa former, såsom kursiv eller tjock stil. Dessa fås genom att avbilda punkterna innan de ritas upp med lämpliga transformationer. Exempelvis får kursiv stil genom att vi avbildar $(x, y) \mapsto (x + \alpha y, y)$.

2 Implementering av Algoritmen

Det första vi behöver är en funktion som ritas upp en Beziér kurva. Den skall kunna anropas enligt

```
>> DrawBezierCurve( P1 , P2 , P3 , P4 );
```

Funktionen skall då skapa en vektor **t** med jämt utspridda värden mellan 0 och 1, och beräkna, samt plotta, polynomet $p(t)$. Det skall även gå att anropa funktionen med

```
>> DrawBezierCurve( P1 , P2 , P3 , P4 , 'control' );
```

Så skall streckade räta linjer som sammanbinder styrpunkterna ritas ut, see Figur 1. Detta måste lösas genom frivilliga inargument. Använd `nargin`. Testa din funktion genom att rita upp en halvcirkel genom att skriva

```
>> P1 = [0 , 0]'; P2 = [0 , 4/3]'; P3 = [2 , 4/3]'; P4 = [2 , 0]';  
>> DrawBezierCurve( P1 , P2 , P3 , P4 );  
>> axis equal
```

För att rita upp bokstaven finns en Matlab funktion `DrawFont`. Den ritas upp de linjestycken som ingår i bokstaven men måste kompletteras med styrpunkter och anrop till `DrawBezierCurve` för att rita upp de krökta kurvbitarna. Även denna funktion skall kunna anropas antingen som

```
>> DrawFont()
```

eller

```
>> DrawFont('control')
```

om man vill rita upp styrpunkterna tillsammans med bokstaven.

Slutligen skall du anpassa funktionen `DrawFont` så att den kan anropas som

```
>> DrawFont('italic')
```

och då skall en kursiverad bokstav ritas upp. Lämplig lutning fås om skuvningen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.07 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appliceras på alla interpolations- och styrpunkter innan vi ritas upp bokstaven.

3 Redovisning och Rapporten

Rapporten skall ha följande kapitel och innehåll

- *Introduktion* där problemet, dvs beskrivning av geometri med Beziér kurvor introduceras. Egenskaper hos Beziér kurvor skall beskrivas kortfattat. Ni skall även kort introducera tillämpingen dvs design av font paket.
- *Matlab program* där ni beskriva alla Matlab funktioner och program som ni skrivit. Ni skall inte klippa in programkoden utan för varje funktion beskriv kort funktionens syfte, vilka inparametrar den behöver och vad den gör.
- *Resultat* där det beskrivs hur metoden fungerade. Ni skall ge exempel på en sammansatt kurva där bestående av två Beziér kurvor sådana att hela kurvan får kontrinuerlig tangentriktning. De valda styrpunkterna skall redovisas och det skall förklaras hur punkterna är valda. Ni skall även redovisa eran färdiga bokstav. Både i normal och kursiv form. Antalet linjer respektive Beziér kurvor som användes är viktigt att redovisa.
- *Diskussion* där resultatet sammanfattas. Fungerade metoden? Blev resultatet bra?

De grafer som minst måste ingå i rapporten är

- Den sammansatta Beziér kurva ni gjort med styrpunkter utritade. Den designade bokstaven skall ritas upp både i vanlig och kursiv stil. Rita upp bokstaven både med och utan styrpunkterna.

Se dessutom generella krav på rapport och matlab program från hemsidan.