

Tentamen TANA17 Matematiska beräkningar

Provkod: DAT1 **Godkänd:** 8p av totalt 20p **Tid:** 13:e januari klockan 14.00-18.00

Redovisning Lös först uppgifterna i Matlab. Då du har en färdig lösning skriver du ner de kommandon du använde på papper. Redovisa även eventuella resultat du fick då körde dina Matlab kommadon. Grafer behöver inte redovisas.

- (2p) **1:** Använd kolon-notation för att skapa en vektor som innehåller talen $1, 2, 3, \dots, 50$. Använd sedan elementvisa operationer och kommandot `sum` för att beräkna summan

$$S = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{1+k^2}.$$

- (2p) **2:** Vi vill studera funktionen

$$f(x) = e^{-2x} + 2 \sin(x/2)$$

på intervallet $0 \leq x \leq 1$, och undersöka var dess minimum inträffar.

- a) Skapa en vektor $\mathbf{x}$ som innehåller $N = 100$ jämnt utspridda tal på intervallet $[0, 1]$. Beräkna sedan en vektor $\mathbf{f}$ med motsvarande funktionsvärden och utnyttja dessa vektorer för att plotta funktionen på aktuellt intervall.
- b) Använd Matlabkommandot `min` för att hitta det minsta värdet i vektorn $\mathbf{f}$. Detta approximerar funktionens minimum på intervallet. Hitta även det x -värde där funktionen antar sitt minsta värde.

- (1p) **3:** Låt matrisen A vara given som

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna först determinanten $\det(A)$ med hjälp av funktionen `det`. Vi skall nu visa att radoperationer inte ändrar determinantens värde. Skriv därför ett Matlab kommando som adderar rad 1 till rad 3. Rad 3 i matrisen skall alltså ersättas med

$$a'_{3k} = a_{3k} + a_{1k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Beräkna sedan determinanten av den nya matrisen och verifiera att du får samma resultat.

- (2p) **4:** Följande kommandon är tänkta att kontrollera ifall alla element i en vektor är nollskiljda:

```
for i=1:length(x)
    if x(i) ~= 0
        NollSkiljd=1;
    else
        NollSkiljd=0;
    end
end
```

Förklara vad som går fel och gör de ändringar som krävs för att programmet skall fungera som det är tänkt.

- (2p) **5:** Låt A vara en matris av storlek $n \times m$. Skriv ett Matlabsript som använder `for`-loopar och en `if`-sats för att beräkna summan av alla positiva tal i matrisen. Testa ditt program på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (2p) **6:** Ett spelbolag erbjuder olika lotterier där man kan vinna en summa pengar varje år under ett antal år. För att jämföra värdet av sådana vinster vill vi skriva en funktion som beräknar *nuvärdet*. Räknar vi med en ränta α så beräknas värdet av en sådan vinst enligt formeln

$$V = \beta \sum_{i=1}^n (1 + \alpha)^{-i}$$

där β är det årliga beloppet som betalas ut och n är antalet år som vi får utbetalningar.

Skriv en funktion `Nuvarde` med tre inparametrar β , α och n som beräknar nuvärdet av vinsten enligt formeln ovan.

Utnyttja funktionen för att bestämma vad som är mest värdefullt. 10,000 *kr* om året i 50 år eller 25,000 *kr* i 10 år. Antag att räntan är 5%, dvs $\alpha = 0.05$.

- (3p) **7:** En rot till ekvationen $f(x) = 3 - x^2 - e^{-x} = 0$ kan hittas genom att beräkna gränsvärdet för talföljden,

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_n = \sqrt{3 - e^{-x_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

Skriv ett program som beräknar talföljdens gränsvärde. Du skall fortsätta att bilda nya tal x_n ända tills avbrottskriteriet $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ är uppfyllt.

Vi vill även studera konvergenshastigheten. Ditt program skall därför skriva en tabell innehållande iterationsnummer n , x_n , samt skillnaden $x_n - x_{n-1}$ till skärmen. Utskriften skall göras enligt följande mönster:

n	x(n)	x(n)-x(n-1)
1	1.6223811	6.22e-01
2	1.6740884	5.17e-02
3	1.6770572	2.97e-03
4	1.6772229	1.66e-04
5	1.6772322	9.23e-06

(2p) **8:** Vi vill studera funktionen

$$f(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{x} + \sin(\pi x/2) + x),$$

- Rita en graf över funktionen $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$.
- Använd Matlabfunktionen `integral` för att beräkna

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

(4p) **9:** Vi vill skriva ett simuleringssystem som kan användas för att undersöka tärnings-spelet Yatzy. Systemet skall kunna simulera ett stort antal spelomgångar och bestämma sannolikheten för att olika kombinationer dyker upp. Som en del i projektet att utveckla systemet skall följande uppgifter lösas.

- Skriv en Matlabfunktion som simulerar en spelomgång. Funktionen skall returnera en vektor innehållande resultatet från fem tärningskast. Funktionen skall kunna användas på följande sätt

```
>> x = YatzyOmgang
x =
    4     6     1     3     1
```

där alltså vektorn x tilldelas 5st slumpmässiga heltal mellan 1 till 6. Använd antingen `rand` eller `randi` för att skapa slumpalen.

- Att få Kåk innebär att två av tärningarna ger samma resultat och att dessutom de övriga tre tärningarna ger samma resultat. Exempelvis har vi Kåk om

```
>> x = YatzyOmgang
x =
    4     3     3     4     3
```

Ger alla tärningar samma resultat är det istället Yatzy och det räknas inte som kåk. Skriv en funktion `KontrolleraYatzy`, med en vektor som representerar en spelomgång som inparameter, som kontrollerar om vi har fått Kåk. Funktionen skall ha en utparameter som getts värdet *sant* om vi har Kåk och *falskt* annars

Lösningsförslag till tentan för TANA17 Januari 2016.

1: Vi beräknar summans värde med kommandona

```
>> k=1:50;
>> S=sum( 1./(1+k.^2) )
S =
    1.0569
```

2: Följande kommandon plottar grafen och markerar maximum:

```
>> n=100;x=(0:n-1)/(n-1);
>> f=exp(-2*x)+2*sin(x/2);
>> plot(x,f)
>> [m,k]=min(f);
>> disp(m),disp( x(k) )
```

Maximum är $m = 0.8448$ och det inträffar vid $x = 0.3535$.

3: Bilda matrisen och lös problemet med

```
>> A=[ 2 3 1 ; 1 -2 3 ; 1 -1 2];
>> det(A)
ans =
     2
>> A(3,:)=A(1,:)+A(3,:);
>> det(A)
ans =
     2
```

4: Problemet är att endast sista kontrollen räknas. Enklaste lösningen är att avbryta då vi hittar två element som inte ligger i stigande ordning med **break**. Vi får

```
for i=1:length(x)
    if x(i) ~= 0
        NollSkiljd=1;
    else
        NollSkiljd=0;
        break
    end
end
```

Det finns flera alternativa lösningar som ger enklare kod. Exempelvis

```

NollSkiljd=1;
for i=1:length(x)
    if x(i) == 0 % Vänt på jämförelsen!
        NollSkiljd=0;
        break
    end
end
end

```

5: Vi bildar matrisen och beräknar antalet positiva element med

```

A=[ 1 -1 0 3 ; -3 2 1 0 ; 2 -1 3 -1];

[n,m]=size(A);
S=0;
for i=1:n
    for j=1:m
        if A(i,j)>0, S=S+A(i,j); end
    end
end
disp(S)

```

vilket ger värdet $S = 12$.

6: Funktionen blir

```

function [V]=Nuvarde( beta,alpha,n)
V=0;
for i=1:n
    V=V+(1+alpha)^(-i);
end
V=V*beta;
end

```

Vi använder funktionen för att jämföra de två fallen

```

>> V50 = Nuvarde( 10000 , 0.05 , 50 )
V50 =
    1.8256e+05
>> V10 = Nuvarde( 25000 , 0.05 , 10 )
V10 =
    1.9304e+05

```

Det är alltså bättre att få 25,000 *kr* under 10 år.

7: I filen hittaRot.m skriver vi

```

% Inför variabler x0 och x1 som representerar två på varandra
% följande approximationer
x0=-1;x1=1;n=0;    % Med x0=-1 blir avrottsvikkloret falskt
tol=10^-4;
fprintf(1,'  n      x(n)      x(n)-x(n-1)\n');
fprintf(1,'-----\n');
while abs(x0-x1)>tol
    % beräkna nästa approximation
    x0=x1;
    x1=sqrt(3-exp(-x0));
    n=n+1;

    % Skriv ut en rad i tabellen
    fprintf(1,' %i    %9.7f    %9.2e\n',n,x1,x1-x0);
end

```

8: Vi använder kommandona

```
>> f=@(x) (sqrt(x)+sin(pi*x/2)+x)/3;
>> x=0:0.01:1;
>> plot(x,f(x))
>> I=integral(f,0,1)
I =
    0.6011
```

9: Använder vi funktionen `randi` blir Yatzy funktionen

```
function [ Kast ]=YatzyOmgang()
    Kast = randi( [1 6],5,1);
end
```

För att kontrollera om alla tal är lika jämför vi de övriga med det först kastet.

```
function [Test]=KontrolleraYatzy( Kast )
    % Börja med att räkna efter hur många vi fick av varje typ.
    AntalAvVarje=zeros(6,1);
    for i=1:5
        AntalAvVarje(Kast(i))=AntalAvVarje(Kast(i))+1;
    end
    % Kåk betyder att ett resultat kom upp två gånger och
    % ett annat tre gånger. Det finns alltså både en tvåa
    % och en trea i vektorn AntalAvVarje

    FinnsTvaa=0;FinnsTrea=0;
    for i=1:6
        if AntalAvVarje(i)==2,FinnsTvaa=1;,end
        if AntalAvVarje(i)==3,FinnsTrea=1;,end
    end;
    Test=0;
    if FinnsTvaa & FinnsTrea
        Test=1;
    end
end
```