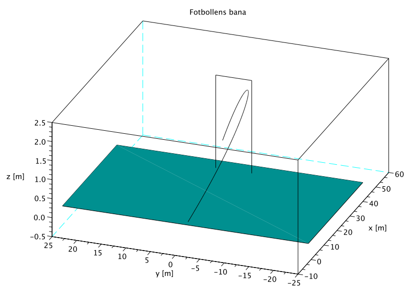
TANA23 Matematiska Algoritmer och Modeller för IT



Fredrik Berntsson, Linköpings Universitet

TANA23 Kursmål och Innehåll

Målet med kursen är att

- Ge insikt i svårigheter som uppkommer då matematiska problem löses på dator.
- Ge en översikt över moderna metoder för att lösa vanligt förekommande matematiska problem på dator.
- Visa hur beräkningsmetoder kan analyseras matematiskt med avseende på effektivitet, inverkan av beräkningsfel, etc.

De problemområden som täcks är

- Datoraritmetik. Beräkningsfelsanalys.
- Icke-Linjära ekvationer. Beräkning av Integraler.
- Interpolation. Representation av kurvor och ytor.
- Matematisk Modellering och Ordinära differentialekvationer.

TANA23 Organisation

I kursen ingår följande moment:

- Föreläsningar
  - Presentation av teori och tillämpningsexempel.
- Lektioner
  - Problemdemonstration och eget arbete.
- Datoraborationer
  - Grupper om två studenter. Fyra laborationer.
  - Rapporter lämnas i respektive lärares fack. Hämtas i kursfacket.

Lärare på kursen är Fredrik Berntsson. Hittar mig i Hus B. Ing 23-25. 2:a vån.

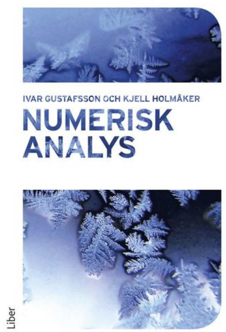
TANA23 Basgruppsarbete

Terminens basgruppsarbete samordnas i kursen:

- Följer samma principer som arbetet under Termin 1.
- Basgruppshandledare och gruppindelning finns.

All information finns på kurshemsidan!

TANA23 Kurslitteratur



Ivar Gustafsson och Kjell Holmåker,
Liber, 2016.

Boken innehåller

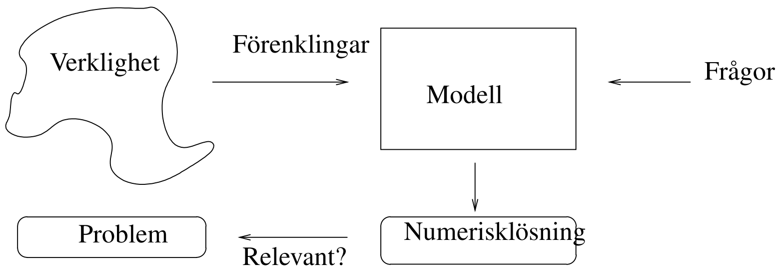
- en översikt över moderna beräkningsmetoder.
- matematisk analys av metodernas egenskaper.
- tillämpningsexempel och implementation.

Lektionerna: Problemsamling från kurshemsidan.

Föreläsning 1

- Introduktion. Tillämpningar.
- Definitioner. Grundläggande begrepp.
- Felfortplantning. Aritmetriska operationer. Kancellation.

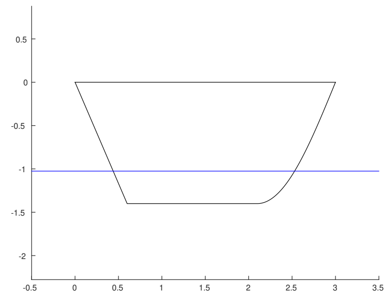
Teknisk problemlösning



Matematik är det språk som används för att formulera tekniska problem!

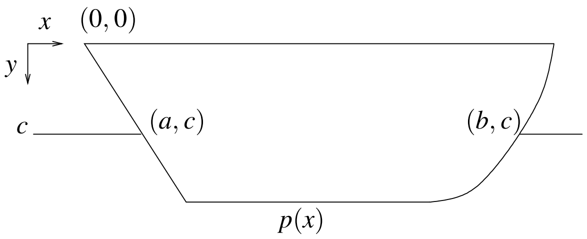
Tillämpning: Hur stor del av en båt är under vatten?

Problem En båt som lastas sjunker precis så mycket att båtens vikt blir precis motsvarar det vatten den tränger undan.



Givet en viss vikt hur skall vi beräkna hur stor del av båten som hamnar under vatten?

Matematisk modell Inför relevanta storheter och beskriv lösningsmetoden. Båtens profil ges av en skiss



Båtens vikt inklusive last är $L = 697\,kg$. Vattnets densitet är $998\,kg/m^3$.

Finns två rötter till ekvationen $p(x) = c$.

Lösningsgång Vi löser problemet i följande steg:

1. Givet ett värde på c hittar vi de två rötterna a och b till ekvationen $p(x) = c$. Vi sorterar så att $a < b$.
2. Undanträngd volym beräknas som

$$V(c) = \int_a^b (p(x) - c)dx.$$

3. Lös ekvationen $f(c) = \rho V(c) - L = 0$.

I Kursen Hur definierar vi skrovets profil $p(x)$ i $1D$ eller $2D$? Hur beräknas integraler? Hur löser vi ekvationerna ovan? Hur skall problem formuleras så att standard kod kan användas?

Tillämpning: Multiplikation

Problem Vad är $A \times B = 1843.80343 \times 7900245.6154$?

Observation Det är lättare att beräkna en addition eller en subtraktion. Division är krångligare.

Observation Vi behöver bara multiplicera tal mellan $0.1 < A, B < 1.0$. Varför?

Lösning Vi skapar en tabell $(x_i, c_i) = (x_i, \cos(x_i))$, för jämt utspridda värden $0.1 \leq c_i \leq 1$. Sedan använder vi

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Exempel Är tabellen given med 6 siffrors noggrannhet fås

$$\begin{aligned} A \times B &= 0.184380 \times 0.790025 \approx \cos(1.385355) \times \cos(0.659947) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(2.045302) + \cos(0.725408)) \\ &\approx \frac{1}{2}(-0.456899 + 0.748229) \approx \underline{0.145665} \end{aligned}$$

där vi ignorerat en faktor 10^{11}.

I kursen Talsystem. Förståelse av noggrannhet vid beräkningar.

Grundbegrepp

Definition Låt a beteckna *exakta värdet* och $\bar{a}$ beteckna ett *närmevärde*. Då kallas

$$\Delta a = \bar{a} - a,$$

det *absoluta felet* i närmevärdet $\bar{a}$ och

$$\frac{\Delta a}{a}, \qquad (a \neq 0),$$

kallas det *relativa felet* i närmevärdet $\bar{a}$.

Exempel Låt $a = \sqrt{3}$ och $\bar{a} = 1.732$.

Definition Om det absoluta felet uppfyller,

$$|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-t},$$

så sägs $\bar{a}$ ha *t korrekta decimaler*.

Exempel Avrunda talet $x = 1.759999$ så att närmevärdet $\bar{x}$ har 4 korrekta decimaler.

Definition Om $\bar{a}$ har $t > 0$ korrekta decimaler så sägs alla siffror i positioner med enhet $\geq 10^{-t}$ vara *signifikanta siffror*, utom inledande nollor.

Exempel Låt $a = \sqrt{3}$ och $\bar{a} = 1.732$. Hur många signifikanta siffror har närmevärdet?

Exempel Vi har ett närmevärde $\bar{a} = 0.00739914$ med ett absolut fel $|\delta a| \leq 0.7 \cdot 10^{-7}$. Hur många signifikanta siffror har närmevärdet $\bar{a}$?

Felfortplantning

Problem Vi vill beräkna $f(a)$ då endast ett ett närmevärde $\bar{a}$ är känt. Hur skall vi uppskatta felet

$$|\Delta f(a)| = |f(\bar{a}) - f(a)|.$$

Lösning Använd *Medelvärdessatsen*

Sats Antag att $f(x)$ är deriverbar. Då finns ett tal $\xi \in (a, \bar{a})$ sådant att

$$f(\bar{a}) - f(a) = f'(\xi)(\bar{a} - a) = f'(\xi)\Delta a.$$

Om Δa är litet gäller $f'(\xi) \approx f'(a)$ och vi får att

$$|\Delta f| \lesssim |f'(a)||\Delta a|.$$

Detta kallas *felfortplantningsformeln*.

Exempel Antag att

$$f(x) = (A - x)^2,$$

där $A = 2.6 \pm 0.05$. Beräkna $f(1)$ med felgräns.

Fråga Hur skall vi göra om funktionen $f(x)$ inte är deriverbar?

Svar Nästan hela kursen bygger på att funktioner lokalt kan approximeras med polynom. Funktioner är alltså deriverbara!

Vi kan generalisera detta till flera variabler. Vi får då

Definition Låt $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vara deriverbar. Om endast närmevärden

$$\bar{x}_k = x_k + \Delta x_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

är kända. Enligt *Maximalfelsuppskattningen* får vi då att

$$|\Delta f| \lesssim |\frac{\partial f}{\partial x_1}||\Delta x_1| + \cdots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}||\Delta x_n|.$$

Exempel Vi vill beräkna vikten hos en cylinder med radie $r = 1.92 \pm 0.01\, cm$, höjd $h = 7.5 \pm 0.2\, cm$, och densitet $\rho = 973.04 \pm 0.05\, kg/m^3$. Uppskatta även felet i den beräknade vikten.

Exempel Antag att vi vill beräkna a/b, då endast närmevärden $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är kända. Hur stort blir felet i divisionen? Vad händer om vi istället vill beräkna summan $a + b$?

Felfortplantning vid aritmetriska operationer

Lemma Låt $\bar{a}$ och $\bar{b}$ vara närmevärden till a och b. Felet efter de grundläggande aritmetriska operationerna kan sammanfattas:
Om $c = a + b$ eller $c = a - b$ så gäller

$$|\Delta c| \leq |\Delta a| + |\Delta b|.$$

Om istället $c = a \cdot b$ eller $c = a/b$ så gäller

$$\frac{|\Delta c|}{|c|} \leq \frac{|\Delta a|}{|a|} + \frac{|\Delta b|}{|b|}.$$

Fråga Är detta bra eller dåliga resultat? Vad händer om $a = 101 \pm 1$ och $b = 100 \pm 1$.

Kancellation

Definition Vid subtraktion av två nästan lika stora tal $\bar{a}$ och $\bar{b}$ uppstår en noggranhetsförlust. Detta fenomen kallas *kancellation*.

Exempel Andragradsekvationen $x^2 - 18x + 1 = 0$ har lösningen $x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{80}$. Antag att vi känner $\sqrt{80}$ med 4 korrekta decimaler. Hur noggrant kan rötterna bestämmas?

Exempel Det gäller att

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

För små x är $\cos(x) \approx 1$ och vi får kancellation i det första uttrycket. Undvik kancellation genom *omskrivning*.

Matematiskt ekvivalenta uttryck är inte numeriskt ekvivalenta!