# Föreläsning 6

Integration

- Trapetsmetoden. Feluppskattning.
- Simpsonsformel, Gausskvadratur.

Extrapolation

- Uppskattning av trunkeringsfel.
- Adaptiva metoder.



# Numerisk Integration

**Exempel** Vissa funktioner som $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ har ingen primitiv funktion. Vi vill trots det beräkna

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

Finns det en primitiv funktion kan den ofta vara olämplig att använda. Vi vet att

$$I = \int_{999}^{1000} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1000) - \arctan(999),$$

men får dålig noggranhet på grund av *kancellation*.



**Exempel** Vi vill beräkna en integral

$$I = \int_{x=0}^{1} f(x) dx,$$

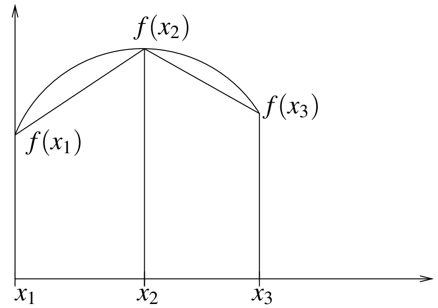
där en tabell med funktionsvärden är tillgänglig

| $x$ | 0.00 | 0.20 | 0.40 | 0.60 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.31 | 1.93 | 1.82 | 1.56 | 0.87 |

Hur skall vi göra?



**Numerisk metod** Approximera $f(x)$ med en styckvis linjär funktion




Vi får

$$I \approx T = h\left(\frac{f(x_1)}{2} + f(x_2) + \frac{f(x_3)}{2}\right), \qquad h = x_2 - x_1.$$

Detta kallas *trapetsmetoden*. Vilka felkällor finns?

Resultatet blir

$$I \approx T = 0.2\left(\frac{1.31}{2} + 1.93 + 1.82 + 1.56 + \frac{0.87}{2}\right) = 1.28 \approx 1.3.$$

Följande felkällor kan indentifieras

- Funktionen $f(x)$ approximeras med räta linjer. Detta ger ett *trunkeringsfel*,
$$|R_T(h)| = |I - T(h)|.$$
Felet beror på både $f(x)$ och steglängden $h$.
- Fel i använda funktionsvärden$\{f(x_k)\}$ ger ett fel $R_{XF}$.
- Slutavrundning av svaret ger $R_B$.

Hur skall alla dessa fel uppskattas?



## Trapetsmetoden

**Definition** Låt $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ vara ekvidistanta punkter. Med *Trapetsmetoden* approximerar vi

$$\int_a^b f(x)dx = T(h),$$

där $h = x_1 - x_0$ är *steglängden* och

$$T(h) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right),$$

**Kommentar** Kräver att funktionen är *integrerbar* och dessutom *begränsad*. Mindre $h$ bör ge noggrannare approximation.



**Exempel** Antag att vi han beräkna en funktion med ett absolut fel $|\Delta f| \leq \varepsilon$. Hur stort fel orsakar detta då integralen beräknas med trapetsmetoden?



**Sats** Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och att approximationen $\bar{f}(x) \approx f(x)$ har ett absolut fel högst $\varepsilon$. Då gäller att

$$|R_{XF}| \leq \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \bar{f}(x)dx\right| \leq (b-a)\varepsilon.$$

**Kommentar** Integralens värde är inte särskilt känsligt med avseende på fel i funktionen $f(x)$. Vad händer om vi istället känner $f(x)$ med ett litet *relativt fel*?

Vi kommer att behöva *medelvärdessatsen* för integraler.

**Sats** Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på intervallet $[a,b]$ samt att $g(x) \geq 0$. Då finns ett $a < \xi < b$ sådant att

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Vi behöver även satsen om mellanliggande värde.

**Sats** Om $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och $c \in [f(a), f(b)]$ då finns det ett $x \in [a,b]$ sådant att $f(x) = c$.



**Sats** Trapetsmetoden beräknar en approximation $T(h)$ sådan att

$$I = \int_a^b f(x)dx) = T(h) + R_T,$$

där

$$R_T(h) = \frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta),$$

för något $a \leq \eta \leq b$.

Det gäller alltså att trunkeringsfelet då en integral approximeras med Trapetsmetoden uppfyller

$$|R_T| = |T(h) - I| \approx Ch^2,$$

där $h$ är steglängden.



**Exempel** Beräkna

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx,$$

med hjälp av Trapetsmetoden.

| $h$ | $T(h)$ | $\lvert T(h) - \frac{\pi}{4}\rvert$ |
|---|---|---|
| 1.000 | 0.750000 | $3.5 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.500 | 0.775000 | $1.0 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.250 | 0.782794 | $2.6 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.125 | 0.784747 | $6.5 \cdot 10^{-4}$ |

Vi ser tydligt att felet beter sig som $R_T \approx Ch^2$.

Hur skall trunkeringsfelet uppskattas?



## Simpsonsformel

**Definition** Låt $x_1$, $x_2$ och $x_3$ vara tre ekvidistanta gridpunkter. Simpsons formel approximerar

$$I = \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx) = \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)) + R_T,$$

där $h = x_2 - x_1$, och

$$R_T(h) = Ch^5.$$

Härleds genom interpolation med andragradspolynom. Trunkeringsfel $\mathcal{O}(h^5)$ på varje delintervall $[x_k, x_{k+2}]$ ger globalt trunkeringsfel $\mathcal{O}(h^4)$.

Kräver att $f^{(4)}(x)$ är kontinuerlig.

# Extrapolation

**Definition** En *numerisk metod* beräknar ett värde $F(h)$, där $h$ är en *diskretiseringsparameter*.

**Definition** Den numeriska metoden är *konvergent* om $F(h) \to F_0$, då $h \to 0$, där $F_0$ är det exakta värdet.

Alltså, en metod är konvergent om *trunkeringsfelet* $R_T \to 0$ då $h \to 0$.

**Lemma** Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så är Trapetsmetoden konvergent.



**Sats** Om $f(x)$ har fyra kontinuerliga derivator på $[a,b]$ så gäller att Trapetsmetoden har ett trunkeringsfel som kan skrivas som

$$R_T = |T(h) - I| = Ch^2 + \mathcal{O}(h^4),$$

där $C$ är en konstant som är *oberoende av h*.

**Kommentar** Detta är lite klurigt att visa men går at utnyttja! Liknande resultat finns för många olika numeriska metoder.



**Sats** Antag att

$$F(h) = F_0 + c_1 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Trunkeringsfelet i approximationen $F(h)$ kan uppskattas,

$$|R_T(h_1)| = |F(h_1) - F_0| \approx c_1 h^p \approx \frac{|F(qh) - F(h)|}{q^p - 1}.$$

där $q > 1$ är ett heltal.

**Kommentar** Vi kan alltså uppskatta ett trunkeringsfel genom att beräkna två olika approximationer med olika steglängd $h$ och dessutom känna till metodens noggrannhetsordning $p$.



**Exempel** Vi använder trapetsmetoden och beräknas approximationer av en integral med olika steglängder.

| $h$ | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.025 |
|---|---|---|---|---|
| $T(h)$ | 1.589339 | 1.577520 | 1.574243 | 1.573402 |

Använd tabellen ovan för att uppskatta felet i approximationen för $h = 0.1$ och $h = 0.05$.

**Sats** Antag att

$$F(h) = F_0 + c_1 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Då gäller att

$$F_1(h) = F(h) - \frac{1}{q^p - 1}(F(qh) - F(h))$$
$$= F_0 + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

**Kommentar** Vi har eliminerat den dominerande feltermen och har fått en approximation med högre noggranhetsordning. Att kombinera en numerisk metod med extratolation ger en ny, oftast bättre, metod.



**Exempel** Beräkna integralen

$$I = \int_0^{0.1} \sqrt{x} e^{-x} dx,$$

med Trapetsmetodenusing. Vi får

| $h$ | 0.05 | 0.025 | 0.0125 | 0.00625 |
|---|---|---|---|---|
| $T(h)$ | 0.017788 | 0.019101 | 0.019586 | 0.019762 |

Uppskattar vi trunkeringsfelet med $R_T(h) \approx (T(h) - T(h/2))/3$ fås

| $h$ | 0.025 | 0.0125 | 0.00625 |
|---|---|---|---|
| $R_T(h)$ | -0.000438 | -0.000162 | -0.0000587 |

Felet **kan inte** skrivs som $ch^2$. Extrapolation fungerar inte.



**Sats** Antag att en funktionen $f(x)$ har tillräckligt många kontinuerliga derivator. Då gäller att

$$f'(x) = D_0(h) + R_T(x),$$

där

$$D_0(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

och

$$R_T(x) = c_1 h^2 + \mathcal{O}(h^4).$$

**Kommentar** Detta kallas för *centraldifferensapproximation* av derivatan. Även här är trunkeringsfelets utseende känt.



**Exempel** Beräkna en derivata $f'(1)$ med hjälp av centraldifferensformeln

$$D_0(h) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h).$$

Vi använder två steglängder och får

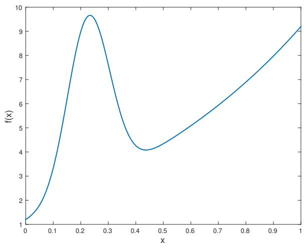
$$D_0(0.3) = 1.25657, \qquad D_0(0.1) = 1.28420$$

Uppskatta nu felet i approximationen $D_0(0.1)$. Förbättra även noggranheten med extrapolation.

**Observation** Det är oftast enklare att kombinera en existerande metod med extrapolation än att utveckla nya metoder med högre noggranhetsordning.

# Adaptiva metoder

**Exempel** Vi vill beräkna integralen av en funktion $f(x)$ med ett givet maximalt fel $\varepsilon$. Först plottar vi funktionen




**Observation** Andra derivatan är av olika storleksordning på olika delar av intervallet. Vi bör anpassa steglängden efter detta.



**Metod** Låt $h = b - a$, och $c = (a+b)/2$. Beräkna

$$I_h = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \text{ och } I_{h/2} = \frac{h}{2}\left(\frac{f(a)}{2} + f(c) + \frac{f(b)}{2}\right).$$

Då är

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_{h/2} + R_T \text{ och } R_T \approx (I_h - I_{h/2})/3.$$

Om $|R_T| < \varepsilon$ är vi klara annars tillämpar vi metoden rekursivt och beräknar

$$I_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{och} \quad I_2 = \int_c^b f(x)dx,$$

med fel högst $\varepsilon/2$. Då blir $I = I_1 + I_2$ med ett fel högst $\varepsilon$.



I Python skriver vi en funktion

```
def AdaptInt(f,a,b,tol,fa,fb):
      c=(a+b)/2
      fc=f(c)
      I1=(b-a)*(fa+fc)/2
      I2=(b-a)*(fa/2+fc+fb/2)/2
      Rt=np.abs((I2-I1)/3)
      if Rt<tol:
          return (I2,Rt)
      else:
          (I1,Rt1)=AdaptInt(f,a,c,tol/2,fa,fc)
          (I2,Rt2)=AdaptInt(f,c,b,tol/2,fc,fb)
      return (I1+I2,Rt1+Rt2)
```

En funktionsberäkning vid varje rekurssionssteg.



För att underlätta anrop skriver vi dessutom

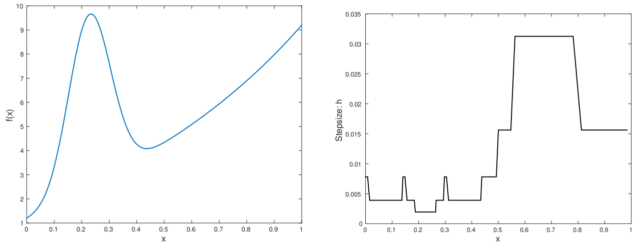
```
def adaptivIntegral(f,a,b,tol):
    return AdaptInt(f,a,b,tol,f(a),f(b))

def f(x):
   return np.sqrt(1+x)

adaptivIntegral(f,0,1,1e-3)
```

Ger resultatet $I = 1.2189506716330833$ och $|R_T| \le 8.1 \cdot 10^{-4}$.

Krävs 159 funktionsberäkningar. Med tolerans $10^{-5}$ krävs istället 1569 funktionsberäkningar.




Funktionen $f(x)$ och den steglängd $h$ som används för fallet `tol`$= 10^{-3}$.

I `scipy.integrate` finns funktionen `quad` som beräknar integraler med liknande adaptivt steglängdsval.



Sammanfattning

- Extrapolation är en väldigt kraftfull teknik för att uppskatta fel och förbättra resultat.
- Det är viktigt att känna till trunkeringsfelets beroende på diskretiseringsparametern $h$ för numeriska metoder.
- Ger möjlighet att kontrollera om ett datorprogram implementerats korrekt.
- Adaptiva metoder anpassar sig till det aktuella problemet. Steglängden väljs automatiskt så att en given tolerans uppfylls.