Föreläsning 7

Derivator och Begynnelsevärdesproblem

- Begynnelsevärdesproblem.
- Differensapproximation av derivator.
- Eulers metod. Lokalt och Globalt trunkeringsfel.
- Heun's explicita metod.
- Stabilitet och Euler's bakåtmetod.

Begynnelsevärdesproblem

Många problem från teknik och naturvetenskap kan formuleras som *begynnelsevärdesproblem*. Dvs

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \qquad t > 0,$$

och $y(0) = y_0$.

Exempel Låt $y(t)$ vara lösningen till problemet:

$$\frac{dy}{dt} = -ay, \qquad \text{och} \quad y(0) = 1.$$

Eftersom

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{-at}\right) = -a\mathrm{e}^{-at} = -ay(t),$$

så får vi att

$$y(t) = \mathrm{e}^{-at}.$$

Lösbarhet och Entydighet

Sats Antag att $f(t, y)$ är kontinuerlig och satisfierar ett *Lipschitz villkor*, dvs

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

för ett intervall $0 < t < a$ och $-\infty < y_1, y_2 < \infty$, där L är en konstant. Då har *begynnelsevärdesproblemet*,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad t > 0, \text{ och } y(0) = y_0,$$

en entydig lösning i intervallet $0 < t < a$.

Exempel Visa att funktionen $f(t, y) = |1 - 2t|y^2$ uppfyller ett Lipschitz villkor i intervallet $0 < t < 1$ och då $|y| \leq C$.

Exempel Antar att $f(t, y)$ är kontinuerligt deriverbar på för $0 \leq t \leq a$ och $-\infty < x < \infty$, om

$$L = \max_{0 \leq t \leq a}\left(\max_{-\infty < y < \infty}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right|\right) < \infty,$$

så uppfyller $f(t, y)$ ett Lipschitzvillkor, för $0 < t < a$, med L som konstant.

Kommentar Lipschitz kontinuitet är starkare än vanlig kontinuitet men lite svagare än deriverbathet.

Exempel Funktionen $f(t,y) = 3y^{2/3}$, är **inte** Lipschitz kontinuerlig.

Kommentar Finns gott om olika mer precisa resultat. Alltid bra att veta om ett problem har en lösning eller inte.

Definition Begynnelsevärdesproblemet innebär att hitta en funktion $y(t)$ sådan att

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \qquad 0 < t < a,$$

och $y(0) = y_0$, där $f(t,x)$ är en given funktion.

Problemet löses genom *Diskretisering*. Inför ett grid $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = a$ och hitta approximationer av $y_i \approx y(t_i)$. Detta betyder att vi approximerar

$$y(t) \approx \mathbf{y} = (y(t_0)\,,\, y(t_1)\,,\,\ldots\,,\, y(t_n))^T.$$

Vi säker alltså en vektor $\mathbf{y}$ med funktionsvärden istället för en funktion $y(t)$.

Approximation av Derivator

Lemma Låt $y(t)$ ha minst två kontinuerliga derivator. Då gäller

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = y'(t) + \mathcal{O}(h),$$

där $h > 0$ är steglängden.

Detta kallas *framåt differens*. Finns även en *Bakåt differens*

$$\frac{y(t) - y(t-h)}{h} = y'(t) + \mathcal{O}(h).$$

I bägge fallen är trunkeringsfelet $R_T \approx Ch$ där h är en konstant.

Euler's metod

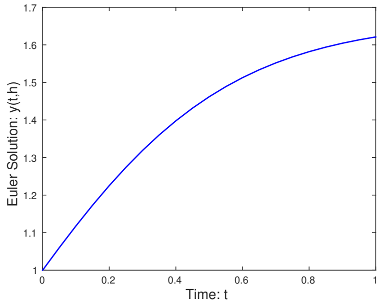
Algoritm Antag $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$. *Euler's metod* beräknar $y_k \approx y(t_k)$ enligt

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

där $h = t_{k+1} - t_k$ är steglängden.

Exempel Låt $y'(t) = 3y - 1.8y^2$, $y(0) = 1$. Beräkna en approximation av $y(1)$ med stehlängden $h = 0.5$. Vi får

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1\\
y_1 &= y_0 + h(3y_0 - 1.8y_0^2) = 1 + 0.5\cdot(3\cdot 1 - 1.8\cdot 1^2) = 1.6\\
y_2 &= y_1 + h(3y_1 - 1.8y_1^2) = 1 + 0.5\cdot(3\cdot 1.6 - 1.8\cdot 1.6^2) = 1.696 \approx y(1)
\end{aligned}$$



Exempel Ekvationen $y'(t) = 3y - 1.8y^2$, $y(0) = 1$ har lösts med Euler's metod och $h = 0.05$.

Hur stort är felet?

Lokalt och Globalt trunkeringsfel

Betrakta ett begynnelsevärdesproblem $y'(t) = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. En numerisk metod beräknar approximationer $y_k \approx y(t_k)$.

Definition Låt $y(t_{k-1}) = y_{k-1}$. Det *lokala felet* vid steg k är

$$R_T^l(t_k) = y(t_k) - y_k.$$

Definition Det *globala felet* är $R_T(t_k) = y(t_k) - y_k$.

Definition Om det lokala felet är $\mathcal{O}(h^{p+1})$ så sägs metoden vara av *ordning* p.

Lemma Om en metod är av ordning p så gäller att det *globala felet* är $\mathcal{O}(h^p)$.

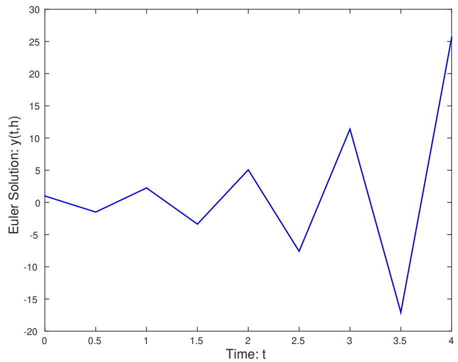
Exempel Euler's metod har ett lokalt fel ch^2 och därmed ordninng $p = 1$.

Exempel Låt $y'(t) = 3y - 1.8y^2$, $y(0) = 1$. Lösningen är $y(1) = 1.6132$. Lös problemet med Euler's metod och olika steglängder h.

h	1/5	1/10	1/20
$y(1, h)$	1.6455	1.6292	1.6292
R_T	0.0323	0.0160	0.0079

Kommentar Detta passar bra med antagandet att det globala felet är $\mathcal{O}(h)$!

Exempel Lös $y'(t) = -5y$, $y(0) = 1$, med Euler's metod och $h = 0.5$.



Vad händer?

Stabilitet

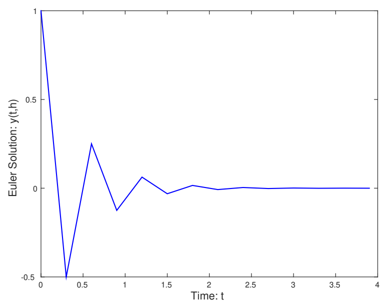
Definition *Test problemet är* $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$.

Definition En numerisk metod kallas *stabil* för $h\lambda$ om metoden ger en begränsad talföljd $\{y_k\}$ då den tillämpas på test problemet.

Kommentar Ett stort negativt λ gör att lösningen $y(t) = e^{\lambda t}$ avtar snabbt! Rimligt att åtminstone kräva begränsad numerisk lösning.

För icke-linjära funktioner $f(t, y)$ kan stabiliteten testas lokalt genom linearisering.

Lemma Euler's metod är stabil om $|1 + h\lambda| \leq 1$.



Exampel Lös $y' = -5y$, $y(0) = 1$, med Euler's metod och $h = 0.35$. Stabil då $|-5 \cdot 0.3 + 1| = 0.5 < 1$. Kravet är $h < 0.4$!

Exempel En *linjär* approximation av differential ekvationen $y' = f(t, y)$, genom punkten $y(t_0) = y_0$, ges av

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ &\approx f(t_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0)(t - t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)(y(t) - y_0) \\ &= h(t) + \lambda y(t) + c, \end{aligned}$$

där c är en konstant och

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0).$$

Stabilitet avgörs av konstanten λ!

Heun's method

Algoritm Antag att $y'(t) = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$. Heun's metod beräknar $y_k \approx y(t_k)$ genom

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, y_k), \\ k_2 &= hf(t_k + h, y_k + k_1), \\ y_{k+1} &= y_k + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Kommentar Eftersom $f(t,y)$ beräknas två gånger är detta en två stegs metod.

Exempel Lös problemet $y'(t) = 3y - 1.8y^2$, $y(0) = 1$ med Heun's metod. Hitta noggranhetsordningen p.

Högerledsfunktionen skapas med Python genom

```
def f(t,y):
    return 3*y-1.8*y**2
```

Måste bero på både t och y.

I Python skriver vi

```
n=11
t=np.linspace(0,1,n)
y=np.zeros(n)
h=t[2]-t[1]

y[0]=1      # Startvärde y(0)=1
for k in range(n-1):
    k1=h*f(t[k],y[k])
    k2=h*f(t[k]+h,y[k]+k1)
    y[k+1]=y[k]+(k1+k2)/2
```

Detta löser problemet med $h = 0.1$. Vektorn y innehåller lösningen, dvs `y[k]`$=y($`t[k]`$)$, för $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Vi använder några ytterligare steglängder h och får

h	1/10	1/20	1/40
$y(1,h)$	1.61131297	1.61271766	1.61302807

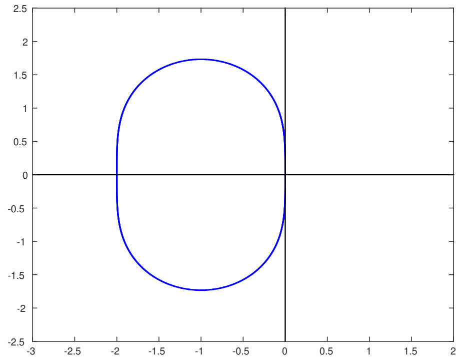
Antag att $y(1;h) = y(1) + ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$ och beräkna

$$\frac{y(1.0; 1/10) - y(1.0; 1/20)}{y(1.0; 1/20) - y(1.0; 1/40)} \approx 4.52 \approx 2^2,$$

och vi har noggranhetsordning $p = 2$.

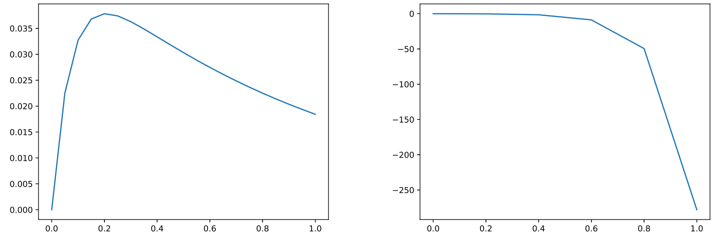
Lemma Heun's metod har noggranhetsordning $p = 2$.

Lemma Heun's metod är stabil om $|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}| \leq 1$.



Exempel Stabilitetsområde för Heun's metod. Lite större än för Euler's metod.

Exempel Lös problemet $y' = -21y(t) + \mathrm{e}^{-t}$, $y(0) = 0$, med hjälp av Heun's metod. Använd $h = 0.05$ och $h = 0.2$.



Med $\lambda = -21$ går gränsen för stabilitet vid $h < 0.096$ ungefär. Metoder som tillåter större steg?

Implicita metoder

Exempel Lös $y' = f(t, y)$ genom att approximera derivatan y' med en *bakåt differens*.

Euler's bakåtmetod

Algoritm Antag $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. *Euler's bakåtmetod* beräknar $y_k \approx y(t_k)$ enligt

$$y_k = y_{k-1} + hf(t_k, y_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

där $h = t_k - t_{k-1}$ är steglängden.

Kommentar Metoden är *implicit* och en ekvation $g(z) = y_{k-1} + hf(t_k, z) - z$ måste lösas i varje steg.

Lemma Euler's bakåtmetod är stabil om $|1 - h\lambda| \geq 1$.

Exempel Vad blir stabilitetskravet om $y' = -21y(t) + \mathrm{e}^{-t}$, $y(0) = 0$, löses med Euler's bakåtmetod?

Lemma Euler's bakåt metod ordning $p = 1$.

Det globala trunkeringsfelet kan alltså skrivas $R_T \approx Ch$. Det är *dålig* noggranhet.

Sammantattning

Lösning av ordinära differentialekvationer

- Explicita metoder som Euler's eller Heun's metod kräver endast att högerledsfunktionen $f(t, y)$ kan evalueras.
- Metodernas noggranhetsordning p är oftast känd eller kan hittas experimentellt.
- Stabilitet är ibland problematisk för explicita metoder. Då används implicita metoder.