TEKNISKA HÖGSKOLAN I LINKÖPING
Matematiska institutionen
Beräkningsmatematik/Fredrik Berntsson

Tentamen TANA23 Matematiska Algoritmer och Modeller

Tid: 14-18, 17:e Augusti, 2023

Hjälpmedel:

1. Räknedosa i fickformat, med nollställt minne och utan instruktionsbok.

Examinator: Fredrik Berntsson

Maximalt antal poäng: 25 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

Jourhavandelärare Fredrik Berntsson (telefon 28 28 60)

Besök av jourhavande lärare sker ungefär 14.45 och 16.45.

Lycka till!

(5p) **1:** **a)** Låt $a = 172.8998826$ vara det exakta värdet. Avrunda a till 5 *signifikanta siffror* för att få ett närmevärde $\bar{a}$. Ange även en gräns för *absoluta felet* i $\bar{a}$.

b) Låt $x = 13.323141$. Ange en gräns för *relativa felet* när x lagras på en dator som användet flyttalsystemet $(10, 5, -10, 10)$.

c) Låt $y = \sqrt{1+x}$, där $x = 1.91 \pm 0.02$. Beräkna ett närmevärde $\bar{y}$ med tillhörande felgräns.

(4p) **2:** Låt tabellen,

x	0.6	0.8	1.1
$f(x)$	2.751	2.658	2.327

med korrekt avrundade funktionsvärden vara given. Använd linjär interpolation och beräkna en approximation till $f(0.73)$. Gör även en fullständig feluppskattning.

(4p) **3:** Vi behöver beräkna funktionen

$$f(x) = \cos(2x) - 1,$$

för små x på en dator med maskinprecision $\mu = 1.11 \cdot 10^{-16}$. Genomför en beräkningsfelsanalys och hitta en gräns för det relativa felet i det beräknade värdet $f(x)$. Då analysen utförs skall du anta att alla beräkningar sker med ett relativt fel högst μ. Du skall även använda din felgräns för att avgöra om *kancellation* förekommer då uttrycket beräknas. Om Kancellation förekommer skall du även föreslå ett alternativt uttryck där kancellationen undviks.

(4p) **4:** Vi vill hitta en rot x^* till ekvationen $f(x) = 0$ där

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 3x^2.$$

a) Fixpunktsiteration innebär att man bildar en talföljd $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, för $k = 1, 2, 3, \ldots$, där x_0 är en given startgissning. En fixpunkt x^* satisfierar $x^* = \varphi(x^*)$. Visa att en fixpunktsiterationen $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ konvergerar mot fixpunkten x^* om $|\varphi'(x^*)| \leq m < 1$, och startgissningen x_0 väljs tillräckligt nära x^*.

b) Utnyttja resultatet från **a)** för att visa att iterationen

$$x_{k+1} = \sqrt{\mathrm{e}^x/3},$$

konvergerar mot roten till ekvationen $f(x) = 0$. Du får utnyttja att $x^* \approx 0.9$.

(4p) **5:** Vi vill beräkna en approximation av integralen

$$I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

a) Använd Trapetsmetoden och beräkna en approximation $T(h)$ av I, med steglängden $h = 0.5$.

b) Ytterligare några approximationer till I har beräknats med hjälp av Trapetsmetoden, och olika steglängder h. Följande resultat finns givna.

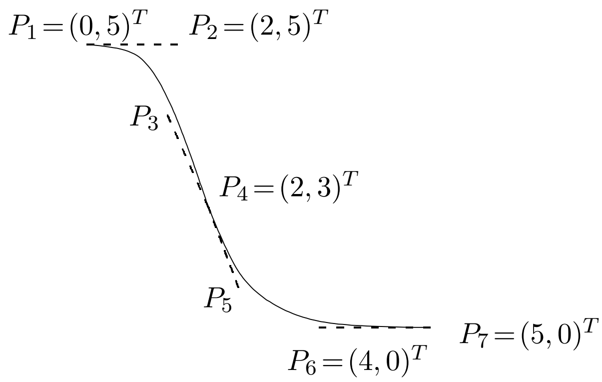
h	0.1	0.02
$T(h)$	0.4386	0.4379

Det är känt att trunkeringsfelet för Trapetsmetoden är $T(h) = I + R_T$, där $R_T \approx Ch^2$. Unyttja detta för att uppskatta trunkeringsfelet i approximationen $T(h = 0.1) = 0.4386$. *Redovisa dina beräkningar tydligt.*

(4p) **6:** Kubiska Beziér kurvor är ett av standard verktygen för beskriva former matematiskt. Gör följande:

a) Utnyttja identiteten $1 = 1^3 = ((1-t)+t)^3$ för att härleda de vikter som definierar en kubisk Beziér kurvor. Skriv upp det fullständiga uttrycket för kurvan $s(t)$. Hur många styrpunkter $\{P_k\}$ krävs för att entydigt definiera en kubisk Beziér kurva? Ange även hur många av styrpunkterna som interpoleras av $s(t)$, dvs $s(t_k) = P_k$ för något parametervärde $t = t_k$.

b) Vi skall skapa en parametrisk kurva som består av två kubiska Beziér kurvor enligt det som visas i bilden



Välj punkterna P_3 och P_5 så att kurvan har en kontinuerlig tangentriktning i P_4. Kurvas lutning i punkten P_4 skall vara precis -2, dvs tangenten i P_4 skall kunna skrivas på formen $y = -2x + b$ för någon konstant b.

Lösningsförslag till tentan för TANA23 Augusti 2023.

(5p) **1:** För **a)** anvundar vi till $\bar{a} = 172.90$ som har 2 korrekta decimaler och 5 signifikanta siffror. Eftersom vi har två korrekta decimeler är en gräns för det absoluta felet $|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$.

Uppgift **b)** ger ett flyttalssystem med maskinprecision $\mu = 0.5 \cdot 10^{-5}$. Detta är övre gränsen för det relativa felet då tal lagras på datorn.

I uppgift **c)** beräknar vi ett approximativt värde $\bar{y} = \sqrt{1+\bar{x}} = \sqrt{1+1.91} = 1.71$ med $|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$. Felfortplantningsformeln ger

$$|\Delta y| \lesssim |\frac{\partial y}{\partial x}||\Delta x| = |\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}||\Delta x| < 0.006.$$

Totala felet blir $|R_{TOT}| \leq 0.006 + 0.5 \cdot 10^{-2} < 0.011$. Alltså $y = 1.71 \pm 0.02$.

(4p) **2:** Newtons interpolations formel ger ansatsen $p(x) = p_1(x) + R_T(x) = c_0 + c_1(x - 0.6) + c_2(x-0.6)(x-0.8)$, där sista termen används för trunkeringsfelet. Vi använder nu tabellvärden och får $p(0.6) = c_0 = 2.751$ och $p(0.8) = c_0 + c_1(0.2) = 2.658$, vilket ger $c_1 = -0.465$. Sista ekvationen är $p(1.1) = c_0 + c_1(0.5) + c_2(0.5)(0.3) = 2.327$ som ger $c_2 = -1.2767$. Alltså

$$p_1(x) = 2.751 - 0.465(x-0.6) \text{ och } R_T(x) = -1.2767(x-0.6)(x-0.8).$$

Vi får $f(0.73) \approx p_1(0.73) = 2.690$ med $|R_B| < 0.5 \cdot 10^{-3}$ och $R_T \leq |-1.2767(0.73 - 0.6)(0.73-0.8)| < 0.012$. Felet i funktionsvärden från tabellen ger ett fel $R_{XF} < 0.5 \cdot 10^{-3}$ i svaret. Alltså $f(0.73) = 2.690 \pm 0.013 = 2.7 \pm 0.03$.

(4p) **3:** Beräkningsordningen är

$$f(x) = \cos(2x) - 1, \cos(a) - 1 = b - 1 = c.$$

Felfortplantningsformeln ger sedan

$$|\Delta f| \lesssim |\frac{\partial f}{\partial a}||\Delta a| + |\frac{\partial f}{\partial b}||\Delta b| + |\frac{\partial f}{\partial c}||\Delta c| = |-\sin(a)||\Delta a| + |1||\Delta b| + |1||\Delta c| \lesssim$$

$$\mu(|a\sin(a)| + |b| + |c|) \approx \mu(|4x^2| + |1| + |-2x^2|) \approx \mu,$$

där vi använt $\sin(2x) \approx 2x$, $\cos(2x) \approx 1$, och $f(x) = c \approx -2x^2$, för små x. Hur uppskattningen av $f(x)$ gjorts framgår nedan. Det blir kancellation vilket syns på att relativa felet är av storleksordning $\mu/|x^2|$. Lämpligt alternativt uttryck fås via

$$f(x) = \cos(2x) - 1 = \frac{(\cos(2x)-1)(\cos(2x)+1)}{\cos(2x)+1} = \frac{\cos^2(2x) - 1^2}{\cos(2x)+1} = \frac{-\sin^2(2x)}{\cos(2x)+1}.$$

Vi kan även förenkla till $f(x) \approx -2x^2$. Det är den uppskattning av $f(x)$ som använts ovan.

(4p) **4:** För **a)** antar vi att x^* är fixpunkten. Då $|\varphi'(x^*)| \leq m < 1$ det går att hitta ett intervall I kring x^*, alltså $I = (x^* - d, x^* + d)$, sådant att $|\varphi'(x)| \leq c < 1$, för alla x i intervallet I. Väljer vi då x_0 i samma intervall fås, enligt medelvärdessatsen,

$$|x_1 - x^*| = |\varphi(x_0) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)||x_0 - x_1| \leq c|x_0 - x^*|,$$

där ξ ligger i det intervall som bildas av x_0 och x^*. Alltså ligger även x_1 i intervallet I och resonemanget kan upprepas. Vi får $|x_k - x^*| \leq c^k|x_0 - x^*|$. Eftersom $c < 1$ visar detta konvergensen.

I **b)** noterar vi att vi har en fixpunts iteration $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, där $\varphi(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x/3}$. Vi deriverar och får

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x/3)^{-1/2}\mathrm{e}^x/3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{e}^{x/2}.$$

Roten är $x^* \approx 0.9$ och $|\varphi'(0.9)| \approx 0.71 < 1$, med god marginal. Enligt **a)** konvergerar alltså fixpunktsierationen. Vi måste även övertyga oss om att fixpunkten x^* verkligen är rot till ekvationen. Det ser vi eftertsom

$$x^* = \sqrt{\mathrm{e}^{x^*}/3} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x^*} - 3(x^*)^2 = 0.$$

Detta är originalekvationen.

Obs Notera att uttrycket för $\varphi(x)$ inte är förenklat så långt som går. Skriver man $\varphi(x) = \mathrm{e}^{x/2}/\sqrt{3}$ blir det lite enklare att derivera.

(4p) **5:** För **a)** tillämpar vi trapetsmetoden, med $h = 0.5$, och får

$$I \approx T(h = 0.5) = 0.5(\frac{f(0.0)}{2} + f(0.5) + \frac{f(1.0)}{2}) = 0.4(\frac{1.0000}{2} + 0.4082 + \frac{0.0000}{2}) = 0.4541$$

I **b)** observerar vi att, eftersom $T(h) = I + Ch^2$, det gäller

$$T(5h) - T(h) \approx I + C(5h)^2 - I - Ch^2 = 24Ch^2.$$

Alltså, med $h = 0.1$ och $5h = 0.5$, fås

$$R_T \approx Ch^2 \approx \frac{1}{24}(T(5h) - T(h)) = \frac{1}{24}(0.4541 - 0.4386) = 6.5 \cdot 10^{-4}.$$

Detta är en uppskattning av trunkeringsfelet för approximationen $T(h = 0.1)$. Det går även utnyttja värdet $T(h = 0.02)$ på ett liknande sätt.

(4p) **6:** För **a)** hittar vi vikterna genom

$$1 = 1^3 = (1 - t + t)^3 = (1 - t)^3 + 3(1 - t)^2 t + 3(1 - t)t^2 + t^3,$$

och får positiva vikter om $0 \leq t \leq 1$. Detta ger ett uttryck för kurvan

$$s(t) = P_1(1 - t)^3 + P_2 3(1 - t)^2 t + P_3 3(1 - t)t^2 + P_4 t^3.$$

Eftersom det finns fyra vikter måste det även vara exakt fyra styrpunkter. Från uttrycket ser vi även att $s(0) = P_1$ och $s(1) = P_4$. Det är alltså två av styrpunkterna som interpoleras av kurvan.

För **b)** vill vi att tangentens lutning i P_4 skall vara -2. Detta uppfylls om tangentriktningen är $(1\,,\,-2)^T$. Alltså kan vi välja

$$P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ och } P_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

där α är ett positivt tal. Detta problem har inte unik lösning.