TEKNISKA HÖGSKOLAN I LINKÖPING
Matematiska institutionen
Beräkningsmatematik/Fredrik Berntsson

Tentamen TANA23 Matematiska Algoritmer och Modeller

Tid: 8-12, 1:a Juni, 2023

Plats: U1, U2, U6

Hjälpmedel:

1. Räknedosa i fickformat, med nollställt minne och utan instruktionsbok.

Examinator: Fredrik Berntsson

Maximalt antal poäng: 25 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

Jourhavandelärare Fredrik Berntsson (telefon 28 28 60)

Besök av jourhavande lärare sker ungefär 9.15 och 10.45.

Lycka till!

(5p) **1:** **a)** Låt $a = 19.872657$ vara det exakta värdet. Avrunda a till 5 *signifikanta siffror* för att få ett närmevärde $\bar{a}$. Ange även en gräns för *relativa felet* i $\bar{a}$.

b) Låt $x = 131.7891$. Skriv x på *normaliserad form* och ange en gräns för *relativa felet* när x lagras på en dator som använder flyttalsystemet $(10, 5, -99, 99)$.

c) Låt $y = \sqrt{1+x}$, där $x = 0.72 \pm 0.03$. Beräkna ett närmevärde $\bar{y}$ med tillhörande felgräns.

(4p) **2:** Låt tabellen,

x	1.3	1.5	1.6
$f(x)$	2.172	2.344	2.475

med korrekt avrundade funktionsvärden vara given. Använd linjär interpolation och beräkna en approximation till $f(1.46)$. Gör även en fullständig feluppskattning.

(4p) **3:** Vi behöver beräkna funktionen

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1,$$

för små x på en dator med maskinprecision $\mu = 1.11 \cdot 10^{-16}$. Genomför en beräkningsfelsanalys och hitta en gräns för det relativa felet i det beräknade värdet $f(x)$. Då analysen utförs skall du anta att alla beräkningar sker med ett relativt fel högst μ. Du skall även använda din felgräns för att avgöra om *kancellation* förekommer då uttrycket beräknas. Om kancellation förekommer skall du även föreslå ett alternativt uttryck som kan antas ge bättre noggranhet.

(4p) **4:** Ekvationen

$$x = 3\mathrm{e}^{-x}$$

har en rot x^* i närheten av 1.05.

a) Uppskatta felet i approximationen $x^* \approx \bar{x} = 1.05$.

b) Avgör om iterationsmetoden

$$x_{n+1} = (2x_n + 3\mathrm{e}^{-x_n})/3,$$

konvergerar mot roten x^* då startvärdet $x_0 = 1.05$ används. Motivera svaret med hjälp av teorin för fixpunktsiteration. Du skall inte utföra några iterationer.

(4p) **5:** Vi vill beräkna en approximation av integralen

$$I = \int_0^{0.8} f(x)dx,$$

givet följande tabell med korrekt avrundade funktionsvärden.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	0.7143	0.7786	0.8428	0.9062	0.9685	1.0291	1.0877	1.1437	1.1969

a) Använd Trapetsmetoden och beräkna en approximation $T(h)$ av I, med steglängden $h = 0.4$.

b) Ytterligare några approximationer till I har beräknats med hjälp av Trapetsmetoden, och olika steglängder h. Följande resultat finns givna.

h	0.2	0.1
$T(h)$	0.77092	0.77122

Det är känt att trunkeringsfelet för Trapetsmetoden är $T(h) = I + R_T$, där $R_T \approx Ch^2$. Unyttja detta för att uppskatta trunkeringsfelet i approximationen $T(h = 0.1) = 0.77122$. *Redovisa dina beräkningar tydligt.*

(4p) **6:** En kubisk Beziér kurva ges av uttrycket

$$p(t) = (1-t)^3 P_1 + 3(1-t)^2 t P_2 + 3(1-t)t^2 P_3 + t^3 P_4, \quad 0 < t < 1,$$

där P_1, P_2, P_3 och P_4 är styrpunkter.

a) Visa tydligt att kurvans tangent i startpunkten $t = 0$ är parallell med vektorn $P_2 - P_1$ och att kurvans tangent i slutpunkten $t = 1$ är parallell med vektorn $P_4 - P_3$.

b) Ge en definition av det *konvexa höljet* tillhörande punkterna P_1, P_2, P_3 och P_4. Visa dessutom att den kubiska Beziér kurvan ligger inom det konvexa höljet som ges av styrpunkterna P_1, P_2, P_3 och P_4. Illustrera dessutom med en figur.

c) Låt $P_1 = (0\,,\,0)^T$, $P_2 = (1\,,\,3)^T$, $P_3 = (4\,,\,2)^T$ och $P_4 = (5\,,\,1)^T$ och låt $s(t)$ vara den kubiska Beziér kurva som ges av dessa styrpunkter. Beräkna $s(1/2)$ och utnyttja tillgänglig information för att göra en skiss som så tydligt som möjligt visar hur kurvan $s(t)$ ser ut. Tänk särskilt på att skissen skall vara kompatibel med **a)** och **b)**.

Lösningsförslag till tentan för TANA23 Juni 2023.

(5p) **1:** För **a)** anvundar vi till $\bar{a} = 19.873$ som har 5 signifikanta siffror. Absoluta felet blir $|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$ eftersom $\bar{a}$ har 3 korrekta decimaler efter avrundningen. Därför blir *relativa felet* begränsat av $|\Delta a|/|a| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}/19.8 \leq 0.26 \cdot 10^{-4}$.

Uppgift **b)** ger ett flyttalssystem med maskinprecision $\mu = 0.5 \cdot 10^{-5}$. Detta är övre gränsen för det relativa felet då tal lagras på datorn. Denna gräns är ju oberoende av talet. Skriver vi ändå x på normaliserad form får vi $x = 1.327891 \cdot 10^{-2}$. Vi måste flytta decimalpunkten två steg för att få en siffra framför. I uppgift **c)** beräknar vi ett approximativt värde $\bar{y} = \sqrt{1+\bar{x}} = \sqrt{1+0.72} = 1.31$ med $|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$. Felfortplantningsformeln ger

$$|\Delta y| \lesssim |\frac{\partial y}{\partial x}||\Delta x| = |\frac{1}{2\sqrt{1+x}}||\Delta x| < 0.01144.$$

Totala felet blir $|R_{TOT}| \leq 0.01144 + 0.5 \cdot 10^{-2} < 0.017$. Alltså $y = 1.31 \pm 0.02$.

(4p) **2:** Newtons interpolations formel ger ansatsen $p(x) = p_1(x) + R_T(x) = c_0 + c_1(x - 1.3) + c_2(x-1.3)(x-1.5)$, där sista termen används för trunkeringsfelet. Vi använder nu tabellvärden och får $p(1.3) = c_0 = 2.172$ och $p(1.5) = c_0 + c_1(0.2) = 2.344$, vilket ger $c_1 = 0.8600$. Sista ekvationen är $p(1.6) = c_0 + c_1(0.3) + c_2(0.3)(0.1) = 2.475$ som ger $c_2 = 1.5$. Alltså

$$p_1(x) = 2.172 + 0.86(x-1.3) \text{ och } R_T(x) = 1.5(x-1.3)(x-1.5).$$

Vi får $f(1.46) \approx p_1(1.46) = 2.3096 \approx 2.310$ med $|R_B| < 0.5 \cdot 10^{-3}$ och $R_T \leq |1.167(1.46-1.3)(1.46-1.5)| < 0.96 \cdot 10^{-2}$. Felet i funktionsvärden från tabellen ger ett fel $R_{XF} < 0.5 \cdot 10^{-4}$ i svaret. Alltså $f(1.46) = 2.310 \pm 10^{-2}$.

(4p) **3:** Beräkningsordningen är

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 = \sqrt{a} - 1 = b - 1 = c,$$

Felfortplantningsformeln ger sedan

$$|\Delta f| \lesssim |\frac{\partial f}{\partial a}||\Delta a| + |\frac{\partial f}{\partial b}||\Delta b| + |\frac{\partial f}{\partial c}||\Delta c| = |\frac{1}{2\sqrt{a}}||\Delta a| + |1||\Delta b| + |1||\Delta c| \lesssim$$

$$\mu(|\frac{\sqrt{a}}{2}| + |b| + |c|) \approx \mu(|\frac{1}{2}| + |1| + |x/2|) \approx 1.5\mu.$$

där vi använt konjugatuttryck och fått

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1} \approx \frac{x}{2}$$

om x är liten. Det blir kancellation då det relativa felet blir $|\Delta f|/|f| \lesssim 3\mu/x$. Det relativa felet växer alltså då x blir mindre. Ett bättre uttryck för $f(x)$ vore att använda

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Då kommer inte kancellation att uppstå.

(4p) **4:** För **a)** väljer vi $\bar{x} = 1.05$. Den ekvation vi löser är $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} - x = 0$. Felet uppskattas med metodoberoende feluppskattningen

$$|\bar{x} - x^*| \lesssim \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} < \frac{|-1.87 \cdot 10^{-4}|}{|-2.049|} < 9.2 \cdot 10^{-5}.$$

Alltså fås $x^* = 1.0500 \pm 1 \cdot 10^{-4}$.

För) noterar vi att en fixpunktsiteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergerar om $|\varphi'(x^*)| \leq C < 1$, förutsatt att startgissningen x_0 ligger tillräckligt nära x^*. Vi beräknar

$$\varphi'(x) = (2 - 3\mathrm{e}^{-x})/3$$

och $\varphi'(x^*) \approx \varphi'(1.05) \approx 0.317$. Då $|\varphi'(x^*)| << 1$ drar vi slutsatsen att metoden konvergerar. För att vara säkra på att vi får konvergens mot rätt rot sätter vi in fixpunkten i iterationsformeln och får

$$x^* = \varphi(x^*) = (2x^* + 3\mathrm{e}^{-x^*})/3, \text{ eller } 3x^* = 2x^* + 3\mathrm{e}^{-x^*},$$

vilket är precis den ekvation vi började med. Fixpunkten är alltså en rot.

(4p) **5:** För **a)** tillämpar vi trapetsmetoden, med $h = 0.4$, och får

$$I \approx T(h = 0.4) = 0.4(\frac{f(0.0)}{2} + f(0.4) + \frac{f(0.8)}{2}) = 0.4(\frac{0.7143}{2} + 0.9062 + \frac{1.1969}{2}) = 0.76964.$$

I **b)** observerar vi att, eftersom $T(h) = I + Ch^2$, det gäller

$$T(2h) - T(h) \approx I + C(2h)^2 - I - Ch^2 = 3Ch^2.$$

Alltså, med $h = 0.1$, fås

$$R_T \approx Ch^2 \approx \frac{1}{3}(T(2h) - T(h)) = \frac{1}{3}(0.77092 - 0.77122) = -1.00 \cdot 10^{-4}.$$

Detta är en uppskattning av trunkeringsfelet för approximationen $T(h = 0.1)$.

(4p) **6:** För **a)** tar vi uttrycket

$$p(t) = (1-t)^3 P_1 + 3(1-t)^2 t P_2 + 3(1-t)t^2 P_3 + t^3 P_4, \quad 0 < t < 1,$$

där P_1, P_2, P_3 och P_4 är styrpunkterna, och deriverar. Detta ger

$$p'(t) = -3(1-t)^2 P_1 + 3(-2(1-t)t + (1-t)^2)P_2 + 3(-tt^2 + (1-t)2t)P_3 + 3t^2 P_4, \quad 0 < t < 1.$$

Sätter vi sedan in $t = 0$ fås

$$p'(0) = -3P_1 + 3P_2 = 3(P_2 - P_1).$$

Detta visar att tangentriktningen för $t = 0$ är just $P_2 - P_1$. På samma sätt får vi $p'(1) = 3(P_4 - P_3)$.

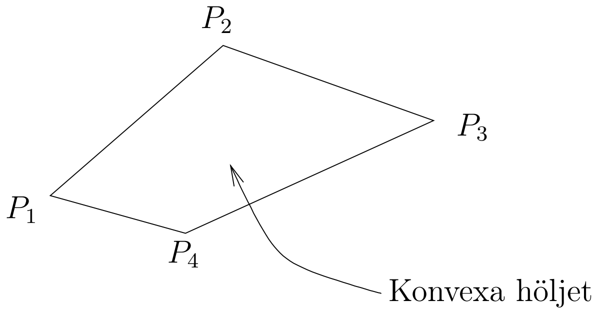
I Uppgift **b)** definierar vi det *konvexa höljet* som alla punkter x som kan skrivas på formen $x = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4$ där $\{\alpha_k\}$ är positiva (alltså $\alpha_k \geq 0$) reella tal som uppfyller $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Att Beziér kurvan ligger inom det konvexa höljer följer då av att vikterna

$$\alpha_1(t) = (1-t)^3, \quad \alpha_2(t) = 3(1-t)^2 t, \quad \alpha_3(t) = 3(1-t)t^2, \quad \text{och } \alpha_4 = t^3, \quad 0 < t < 1,$$

uppfyller precis detta villkor eftersom de är härledda utifrån

$$1 = 1^3 = (1-t+t)^3 = (1-t)^3 + 3(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + t^3.$$

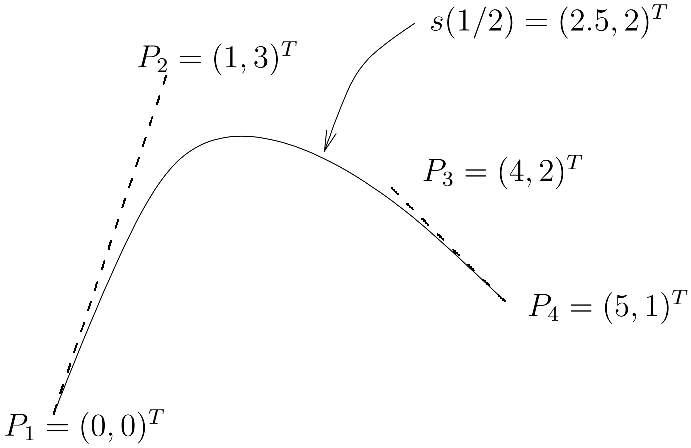
En lämplig skiss skulle kunna vara



För **c)** beräknar vi

$$p(\frac{1}{2}) = (1-\frac{1}{2})^3 P_1 + 3(1-\frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} P_2 + 3(1-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2 P_3 + (\frac{1}{2})^3 P_4 = \frac{1}{8}(P_1 + 3P_2 + 3P_3 + P_4) = (2.5\,,\,2)^T.$$

This means that the sketch will look something like



Det är inte viktigt att allt är skalenligt men kurvan skall starta i P_1 med riktning mot P_2 exempelvis.