TEKNISKA HÖGSKOLAN I LINKÖPING
Matematiska institutionen
Beräkningsmatematik/Fredrik Berntsson

Tentamen TANA23 Matematiska Algoritmer och Modeller

Tid: 14.00–18.00, 3:a Januari, 2024

Hjälpmedel:

1. Räknedosa i fickformat, med nollställt minne och utan instruktionsbok.

Examinator: Fredrik Berntsson

Maximalt antal poäng: 25 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

Jourhavandelärare Fredrik Berntsson (telefon 28 28 60)

Besök av jourhavande lärare sker ungefär 15.15 och 16.45.

Lycka till!

(5p) **1:** **a)** Låt $a = 191.8882$ vara det exakta värdet. Avrunda a till 5 *signifikanta siffror* för att få ett närmevärde $\bar{a}$. Ange även en gräns för det *absoluta felet* i $\bar{a}$.

b) Låt $x = 0.2433541$. Skriv x på *normaliserad form* och ange en gräns för *relativa felet* när x lagras på en dator som använder flyttalsystemet $(10, 5, -99, 99)$.

c) Låt $y = \mathrm{e}^{x/2}$, där $x = 0.72 \pm 0.03$. Beräkna ett närmevärde $\bar{y}$ med tillhörande felgräns.

(4p) **2:** Låt tabellen,

x	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$f(x)$	1.871	1.719	1.683	1.646	1.592

med korrekt avrundade funktionsvärden vara given. Använd linjär interpolation och beräkna en approximation till $f(1.61)$. Gör även en fullständig feluppskattning.

(4p) **3:** Vi behöver beräkna funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 3x$$

för små x på en dator med maskinprecision $\mu = 1.11 \cdot 10^{-16}$. Genomför en beräkningsfelsanalys och hitta en gräns för det relativa felet i det beräknade värdet $f(x)$. Då analysen utförs skall du anta att alla beräkningar sker med ett relativt fel högst μ. Du skall även använda din felgräns för att avgöra om *kancellation* förekommer då uttrycket beräknas. Om kancellation förekommer skall du även föreslå ett alternativt uttryck som kan antas ge bättre noggranhet.

(4p) **4:** Ekvationen

$$f(x) = 3x^2 + x - \mathrm{e}^x$$

har en rot x^* i närheten av 0.65.

a) Uppskatta felet i approximationen $x^* \approx \bar{x} = 0.65$.

b) Använd Newton–Raphsons metod och beräkna en approximation av x^* med åtminstone 5 korrekta decimaler (*skall visas!*)

c) Konvergerar Newton-Raphsons metod kvadratiskt mot roten x^* för denna funktion $f(x)$? Motivera svaret med hjälp av kända egenskaper hos Newton-Raphsons metod och egenskaper för roten x^*.

(4p) **5:** **a)** En funktion $s(x)$ ges av två tredjegrads polynom enligt

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = 0.8 + 0.2x - 0.4x^2, & 0 \leq x < 1, \\ s_2(x) = 0.6 - 0.6(x-1) - 0.4(x-1)^2 - 0.4(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Är $s(x)$ en kubisk splinefunktion? Visa dina beräkningar. Avgör även om $s(x)$ är en naturlig kubisk spline?

b) För att undersöka trunkeringsfelet för kubisk spline interpolation interpolerar vi en funktion $f(x)$ på intervallet $[0, 1]$ med noder $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$. Vi använder olika antal noder n och får följande tabell

n	11	21	41	81
$R_T(h)$	$5.37 \cdot 10^{-5}$	$3.41 \cdot 10^{-6}$	$2.19 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-8}$

där h är steglängden. Utnyttja ovanstående tabell och antagandet att $R_T(h) \approx Ch^p$ för att bestämma metodens noggranhetsordning p.

(4p) **6:** Vi har en andra ordningens ordinär differentialekvation

$$y'' = 2y(1 + y^2), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Skriv om ekvationen som ett system av första ordningens differnetialekvationer. Utnyttja även Euler's metod för att beräkna en approximation av lösningen $y(0.4)$, då steglängden $h = 0.2$ används.

Lösningsförslag till tentan för TANA23 Juni 2023.

(5p) **1:** För **a)** avrundar vi till $\bar{a} = 191.89$ som har 5 signifikanta siffror. Absoluta felet blir $|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$ eftersom $\bar{a}$ har 2 korrekta decimaler efter avrundningen.

I uppgift **b)** skriver vi $x = 2.433541 \cdot 10^{-1}$ som är på normaliserad form, alltså en siffra framför decimalpunkten. Flyttalssystemet $(10, 5, -99, 99)$ har maskinprecision $\mu = 0.5 \cdot 10^{-5}$. Detta är övre gränsen för det relativa felet då tal lagras på datorn. Denna gräns är ju oberoende av talet. I uppgift **c)** beräknar vi ett approximativt värde $\bar{y} = \exp(\bar{x}/2) = \exp(0.72/2) = 1.43$ med $|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$. Felfortplantningsformeln ger

$$|\Delta y| \lesssim |\frac{\partial y}{\partial x}||\Delta x| = |\frac{1}{2}\exp(x/2)||\Delta x| < 0.022.$$

Totala felet blir $|R_{TOT}| \leq 0.022 + 0.5 \cdot 10^{-2} < 0.027$. Alltså $y = 1.43 \pm 0.03$.

(4p) **2:** Newtons interpolations formel ger ansatsen $p(x) = p_1(x) + R_T(x) = c_0 + c_1(x - 1.5) + c_2(x-1.5)(x-1.7)$, där sista termen används för trunkeringsfelet. Vi använder nu tabellvärden och får $p(1.5) = c_0 = 1.683$ och $p(1.7) = c_0 + c_1(0.2) = 1.646$, vilket ger $c_1 = -0.185$. Sista ekvationen är $p(1.9) = c_0 + c_1(0.4) + c_2(0.4)(0.2) = 1.592$ som ger $c_2 = -0.2125$. Alltså

$$p_1(x) = 1.683 - 0.185(x - 1.5) \text{ och } R_T(x) = -0.2125(x - 1.5)(x - 1.7).$$

Vi får $f(1.61) \approx p_1(1.61) =\approx 1.663$ med $|R_B| < 0.5 \cdot 10^{-3}$ och $R_T \leq |-0.2125(1.61 - 1.5)(1.61 - 1.7)| < 0.23 \cdot 10^{-2}$. Felet i funktionsvärden från tabellen ger ett fel $R_{XF} < 0.5 \cdot 10^{-3}$ i svaret. Alltså $f(1.46) = 1.663 \pm 4 \cdot 10^{-3}$.

(4p) **3:** beräkningsordningen är

$$f(x) = e^x - 3x = a - 3x = a - b = c,$$

och felfortplantningsformeln ger

$$|\Delta f| \lesssim |\frac{\partial f}{\partial a}||\Delta a| + |\frac{\partial f}{\partial b}||\Delta b| + |\frac{\partial f}{\partial c}||\Delta c| = |1||\Delta a| + |1||\Delta b| + |1||\Delta c| \lesssim$$

$$\mu(|a| + |b| + |c|) \approx \mu(|1| + |3x| + |1|) \approx 2\mu,$$

där vi använt $e^x \approx 1$, $f(x) = c \approx 1$ då x är liten. Det finns ingen risk för kancellation här. Det relativa felet är begränsat av 2μ (eftersom funktionsvärdet är $f(x) \approx 1$).

(4p) **4:** För **a)** väljer vi $\bar{x} = 1.05$. Den ekvation vi löser är $f(x) = 3x^2 + x - e^x = 0$. Felet uppskattas med metodoberoende feluppskattningen

$$|\bar{x} - x^*| \lesssim \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} < \frac{|2.1 \cdot 10^{-3}|}{|2.98|} < 7.1 \cdot 10^{-4}.$$

Alltså fås $x^* = 0.6500 \pm 8 \cdot 10^{-4}$.

För **b)** formulerar vi Newton–Raphsons metod

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x),$$

där $f'(x) = 6x + 1 - e^x$. Med $x_0 = 0.65$ fås $x_1 = 0.649343542372719$ och $x_2 = 0.649343247192474$ som säkert räcker. Vi väljer $\bar{x} = 0.649343$ och upprepar metodoberoende feluppskattningen

$$|\bar{x} - x^*| \lesssim \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} < \frac{|-7.4 \cdot 10^{-7}|}{|2.98|} < 2.5 \cdot 10^{-7}.$$

Alltså fås $x^* = 0.649343 \pm 3 \cdot 10^{-7}$. Som har 6 korrekta decimaler.

För **c)** noterar vi bara ett eftersom $f'(x) \approx 3$ nära roten har vi säkert en enkelrot. Newton–Raphsons metod skall konvergera kvadratiskt mot enkelrötter.

(4p) **5:** För **a)** undersöker vi kontinuitetsvillkoren. $s_1(1) = 0.6 = s_2(1)$, $s_1'(1) = -0.6 = s_2'(1)$ och även $s_1''(1) = -0.8 = s_2''(1)$. Alltså är $s(x)$ en kubisk spline. Vi beräknar även $s_1''(0) = -0.8$ och drar slutsatsen att $s(x)$ *inte* är en naturlig kubisk spline då en sådan har $s''(x) = 0$ i bägge ändpunkterna.

I **b)** antar vi att, eftersom $R_T(h) \approx Ch^p$ och får

$$\frac{R_T(2h)}{R_T(h)} \approx 2^p.$$

Eftersom intervall längden är 1 blir steglängden $h = 1/(n-1)$ och antalet noder i tabellen svarar mot $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ och $h = 0.0125$. Exempelvis för $h = 0.025$ (eller $n = 41$) fås

$$\frac{R_T(0.05)}{R_T(0.025)} \approx \frac{3.41 \cdot 10^{-6}}{2.19 \cdot 10^{-7}} \approx 15.6 \approx 2^4.$$

Noggranhetsordningen verkar alltså vara $p = 4$ vilket stämmer med teorin.

(4p) **6:** Vi inför en ny obekant $v = y'$. Då är $v' = y'' = 2y(1 + y^2)$ och vi kan skriva som ett system

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ 2y(1+y^2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Använder vi Euler's metod fås, med $h = 0.2$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_0 \\ 2y_0(1+y_0^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 2.8 \end{pmatrix}.$$

På liknande sätt fås $(y_2, v_2)^T = (1.96, 4.576)^T$. Vi får alltså att $y(0.4) \approx y_2 = 1.96$.