

Föreläsning 10:

- Matematisk eller Teknisk Forskning.
- Exempel på Kandidat och Magister projekt.
- Lite om min forskning.

Projektarbetet:

- Vad skall dokumenteras?

Vetenskap eller Filosofi?

Matematik ingår inte i engelskans *Science*! Är matematik en vetenskap?

Definition Ett *axiom* är ett grundläggande antagande som accepteras utan något bevis.

All matematik bygger på ett antal *axiom*. Nya begrepp införs via definitioner. Logiska konsekvenser av definitioner och axiom kallas *satser*.

Definition Avståndet mellan två punkter x och y ges av en *avståndsfunktion* $d(x, y)$ som uppfyller villkoren $d(x, x) = 0$ (1), $d(x, y) = d(y, x)$ (2), $d(x, y) > 0$ om $x \neq y$ (3), och $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (4).

Definition En *cirkel* med radie r och centrum c ges av mängden $C(r, c) = \{x \text{ så att } d(x, c) \leq r\}$.

Exempel I \mathbb{R}^2 kan vi använda $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Alternativt kan vi använda $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$.

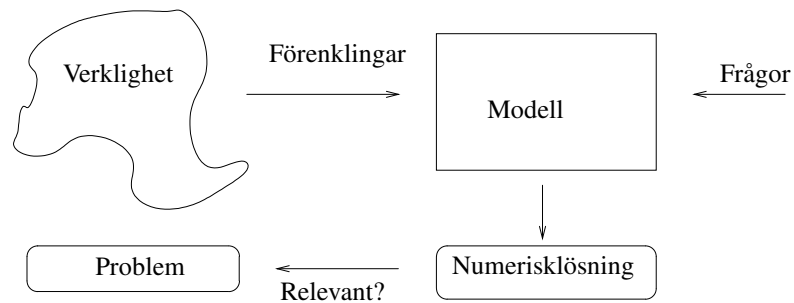
Fråga Är alla cirklar konvexa?

Exempel Ett axiom är *urvalsaxiomet* som säger att ur varje icke-tom mängd kan man plocka ut ett element.

Exempel Ett annat axiomet är *axiomet om övre gräns* som säger att varje icke-tom och uppåt begränsad mängd, bestående av reella tal, har en minsta övre bergänsning.

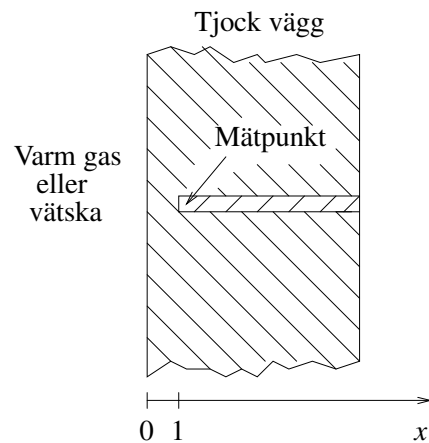
Detta är i princip antagandet att *supremum* existerar! Gäller ej exempelvis för rationella tal.

Matematik liknar filosofi mer än naturvetenskap.



Matematik är det språk som används för att formulera tekniska problem!

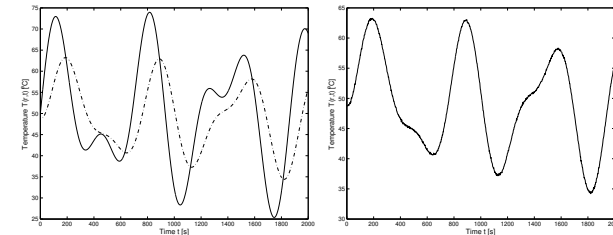
Temperaturmätning på ytor



Vill uppskatta $f(t) = T(0, t)$ från mätningar $g_m(t) \approx T(1, t)$.

Vad forskas det om vid MAI?

- Mycket information finns på hemsidan
<http://www.mai.liu.se/>
 eller
<http://liu.se/mai/und/exjobb>
- De flesta lärare erbjuder kandidat- eller magisterprojekt inom sitt forskningsområde.

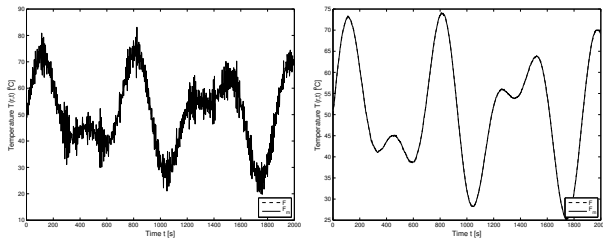


Simulering Givet en exakt yttemperatur $T(0, t)$ beräknar vi temperaturen $g(t) = T(1, t)$ vid mätpunkten. Vi lägger även till simulerat brus för att få $g_m(t)$.

Slutsats Processen är *utjämnande* med en liten *tidsfördröjning*. Problemet att uppskatta $f(t)$ från $g_m(t)$ blir instabilt.

Referens Kandidatarbete utfört av Fredrik Gustafsson, 2014.
 Masterarbete av Yves Nyalihama, 2010.

Stabilisera beräkningarna med hjälp av ett lågpasfilter. Använd bara frekvenskomponenter $\xi < \xi_c$.



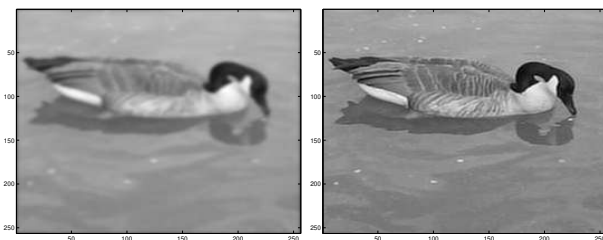
Beräknad yttemperatur $f(t)$ då $\xi_c = 600$ (vänster) och en bra lösning då $\xi_c = 100$ (höger).

Hur skall parametern ξ_c väljas? Ger andra filter bättre lösningar?

Detta är ett exempel på ett *illa-ställt* problem. Många liknande exempel finns.

Exempel

En liten kamera har inte plats för bra optik. Låt bilder få lite dåligt fokus och kompensera numeriskt.



En suddig bild I_b på 256×256 pixlar (vänster). Efter att minimeringsproblemet lösts får vi bilden I_r (höger).

Bildbehandling

Problem Vi har tagit ett foto som blivit "suddigt". Kan vi rätta till problemet?

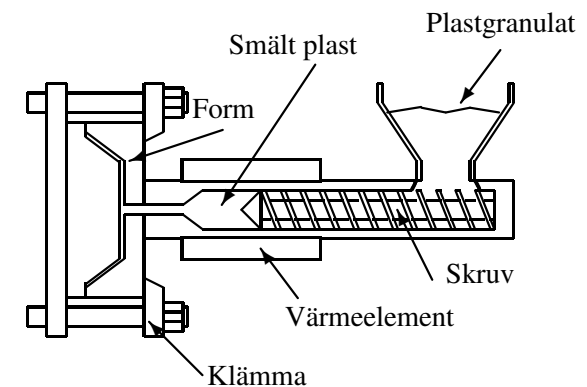
Antagande Låt I vara den "exakta bilden". Bilden som vi observerar genom kameran är $I_b = K \cdot I$, där K är linjär (dvs en matris).

Problemet att beräkna I från I_b är instabilt. Lägg till en straff-term och minimera,

$$\|Kx - I_b\|^2 + \lambda \|x\|^2.$$

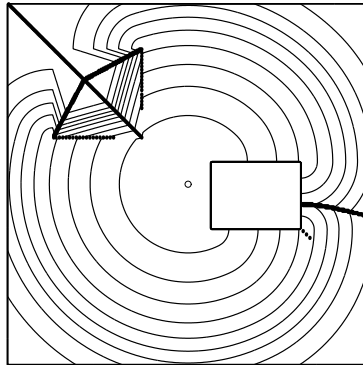
Hur skall parametern λ väljas? Hur skall matrisen K väljas (beror på kameran)? Kan minimeringsproblemet lösas effektivt?

Formsprutning av plast



Flytande plast trycks, under riktigt högt tryck, in i en form för att sedan svalna. För att produkten skall bli snygg måste förloppet simuleras.

Exempel En platta med ett hål och en region med tunnare gods.



Flytfronter då plast trycks in i formen. Problem uppstår om luftfickor skapas. Dessutom fula linjer om två flytfronter möts.

Matematisk modell Trycket inne i gjutformen beskrivs av,

$$\operatorname{div}(|\nabla p|^{\frac{1}{n}-1} \nabla p) = 0.$$

Här n beskriver plastens viskositet. Ett enklare problem att lösa fås om $n \rightarrow 0$.

Definition Låt Ω vara ett polygonområde. Inre avståndet från \vec{x} till \vec{y} är

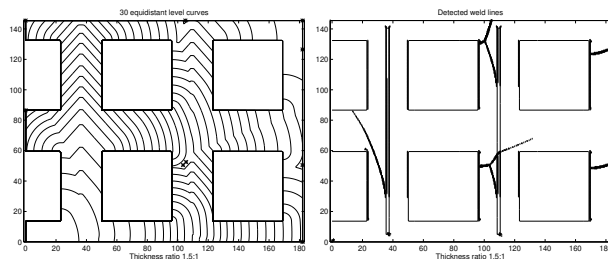
$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{1}{H} ds$$

där H är formens tjocklek, och γ är en kurva från \vec{x} till \vec{y} .

Definition Låt $\vec{x} \in \Omega$ och $r > 0$. Mängden $C_r = \{\vec{y} | \vec{y} \in \Omega \text{ and } d(\vec{x}, \vec{y}) < r\}$ kallas en *pseudo-cirkel*.

Sats Flytfronterna blir pseudo-cirklar då $n \rightarrow 0$.

Exempel Experiment med en realistisk produkt tillverkad med formsprutning



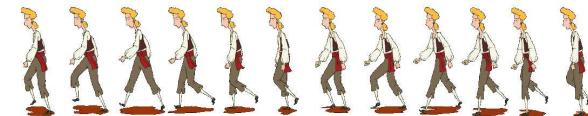
Flytfronter enligt *pseudo-cirkel principen*. Sammanflytningslinjer och luftfickor kan beräknas.

Referens Magisteruppsats, Fredrik Berntsson, 1996.

Animering i Datorspel

Vi vill att en karaktär skall röra sig mellan två punkter. Hur skall animeringssekvens som beskriver rörelsen skapas? Vi kan inte i förväg förutsäga alla möjliga rörelser för karaktärerna i spel.

Problem När karaktärer ritas i hög upplösning måste även rörelsemönstret vara realistiskt.



Referens Examensarbete utfört vid DICE av Anders Andersson, 2012.

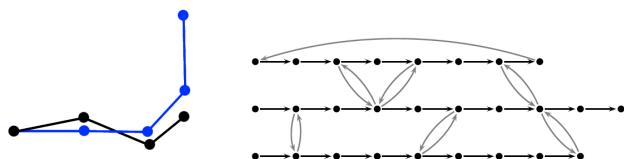
Definition En *Trådmodell* \mathbb{T} består av punkter $\{x_i\}$, bågar $\{(i,j)\}$. Till varje punkt ordnas en hastighet \vec{v}_i . En instans \mathbb{T} kallas även *stillbild*.

Trådmodellen innehåller precis den information som behövs för att rita karaktären på en *bildruta* i en filmsekvens. Vi kan samla in konkreta exempel \mathbb{T}_i genom att placera sensorer på skådespelare. Detta kallas *Motion Capture*.

Problem Antag att vi har en databas bestående av stillbilder $\{\mathbb{T}_i\}$. Hur kan vi använda dessa för att bygga upp en ny filmsekvens?

Exempel

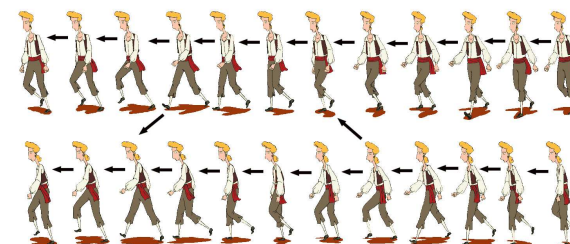
Vi har ett antal *stillbilder*, en *rörelsegraf* och en väg vi vill att karaktären skall röra sig enligt.



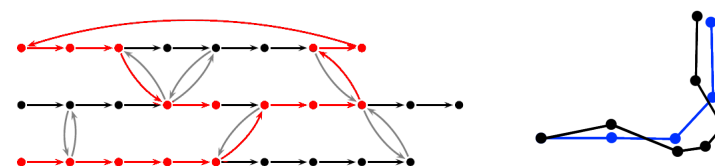
Grafsökning Givet de stillbilder \mathbb{T}_i vi använder ger hastighetsinformationen en väg karaktären kommer att följa. Vi vill hitta en väg genom grafen sådan att karaktären kommer att följa den önskade vägen så bra som möjligt.

Definition Antag att $\{\mathbb{T}_i\}$ är en samling stillbilder. En *Rörelsegraf* består av ett antal riktade bågar $\{(i,j)\}$ som beskriver vilka stillbilder som kan följa på varandra.

Exempel Möjliga övergångar mellan två filmklipp



Resultat Filmsekvensen ges av



Matematiska frågeställningar:

- Hur bygga upp rörelsegraf automatiskt givet ett antal inspelade filmsekvenser?
- Hur skall målfunktionen i grafsökningen se ut och hur skall sökningen genomföras?

Värdering och Analys av Väderderivat

Definition Ett *Väderderivat* är ett finansiellt kontrakt som baseras på väderdata vid en viss plats.

Exempel Efterfrågan, och priset, på elkraft styrs av hur kallt det är på vintern. Är det kallare än 18°C inomhus värmer vi upp till 18°C .

För en viss plats och för en viss tidsperiod definierar vi

$$x = \int_{t_0}^{t_1} \max(18 - T(t), 0) dt.$$

Det är rimligt att anta att mängden elkraft som går åt för uppvärmning är proportionell mot x .

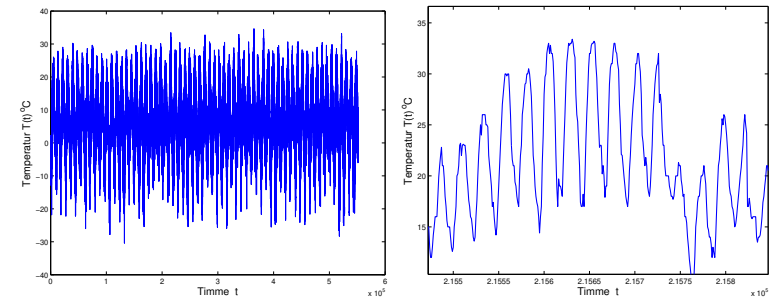
En *kraftproducent* kan försäkra sig mot låg vinst vid en mild vinter genom att teckna ett kontrakt med x som variabel.

Frågor att besvara

- Vad skiljer ett väder derivat kontrakt från andra typer av finansiella derivat?
- Hur skall kontrakt prissättas? Kan man säga hur mycket kraftproducentens *risk* reduceras som en följd av kontraktet?
- Hur skall kontraktet värderas efter att det tecknats?

Referens Licenciat, Emanuel Everest Sinkwembe, 2017.

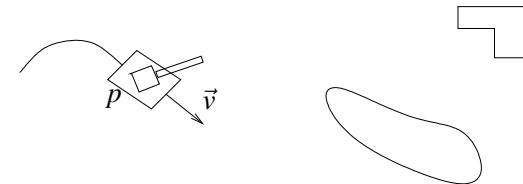
Exempel Temperaturmätning varje timme vid en mätstation i Malmslätt under perioden 1951–2014. Även några dagar under Juli 1973



Hur kan denna typ av data användas för att prissätta ett kontrakt? Statistisk analys? Kan väderprognoser användas?

Målföljning

Problem En operatör siktar på ett mål. Då fordonet rör sig vill vi att systemet skall hålla kvar målet i siktet.



Vi mäter *positionen* $p(t)$, *orienteringen* $\phi(t)$ och avståndet till målet d . Kameran följer sedan automatiskt målet vartefter fordonet rör sig. Ingen bildbehandling.

Referens *GPS assisted stabilization and tracking for a camera system*. Hugo Johansson och Hendric Kjellström. 2016.

Modeller av Blodomloppet

Problem Hjärt och kärlsjukdommar orsakar mycket lidande och stora kostnader. För att utvärdera effekter av kirurgiska ingrepp eller medicin för en enskild patient kan man simulera kärlsystemet. En endimensionell modell behövs för att simuleringen skall kunna genomföras på rimlig tid.

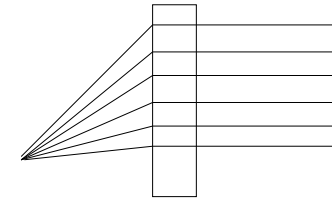
Forskningsprojekt Utveckla en dimensionella modeller av olika delar av blodomloppet. Exempelvis artärer, kapilärer, bifurkationer, och olika skador som åderförkalkning eller aneurysmer. Utveckla ett sätt att kombinera de olika delarna i en stor patientspecifik modell.

Referenser

- Emma Lindgren, *Solving ill-posed problems with mollification and an application in biometrics*, Linköping, 2018.
- Johan Ottosson, *Analyzing arterial blood flow by simulation of bifurcation trees*, Linköping, 2019.

Platta lins

Problem En lins består normalt av ett homogent material där linsens form ger den dess egenskaper. Kan vi istället göra en platt lins där material egenskaper istället varieras?



Metod Hitta en metod att simulera ljusstrålarnas brytning, givet linsens genomtränglighet som funktion av position. Använd optimering för att hitta bästa materialegenskaper.

Referens Jonathan Ek, SAAB, Linköping, 2021.

Datorstöd för Fotbollskommentatorer

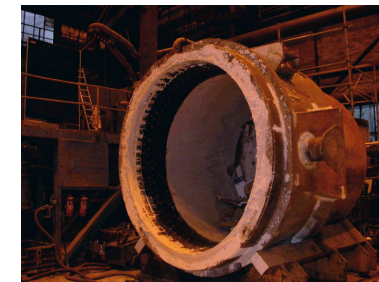
Problem Under en fotbollsmatch vill vi följa bollen och zooma in när något viktigt händer. Hur gör vi? Vi använder Maskininlärning.



Referens Axel Skyttner, *Multi-Person Pose Estimation in Soccer Videos with Convolutional Neural Networks*, Signality, 2018.

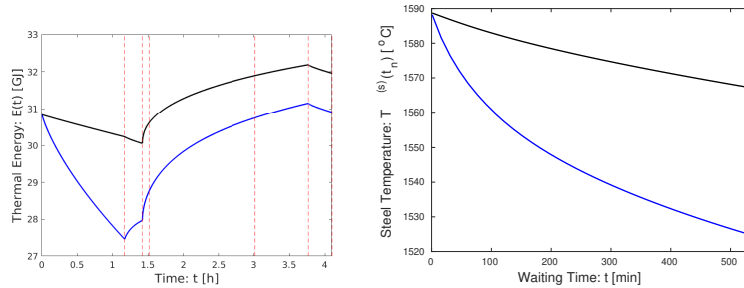
Termisk energi i Stålskänkar

Problem Stål tappas i en skänk och transporteras, för behandling, innan gjutning. Stålet måste ha en viss lägsta temperatur.



Metod Bygg en modell över värmeöverföringen och simulera energiinnehållet i skänken. Då vet vi om skänken är tillräckligt varm eller om vi måste tillföra energi. Bevis av att modellen är stabil och simuleringens fel aldrig kan ackumuleras och växa över tid.

Med SSAB, Luleå.



Exempel Energiinnehållet i skänken under en produktionscykel (vänster). Även ståltemperaturen vid gjutning som funktion av väntetiden innan tappning (höger). I bägge fallen fås olika resultat beroende på om väntetiden sker med eller utan lock.

- *Sammanfattning* beskriv ytterligare en gång vad som gjorts och vad de viktigaste slutsatserna är.
- *Referenser* Försök hitta referenser till böcker eller artiklar. Undvik internetkällor om möjligt. Internet källor kan placeras med lite förklarande text i fotnoter ifall de krävs.

Omfattning Åtminstone 7-12 sidor inklusive grafer. Det är oftast enklare att skriva om man låter texten bli lite längre.

Tänk på Artiklar har ingen innehållsförteckning. Undvik LIPS mallarna.

Frågor?

Artikel och Mini-konferens

Artikel Beskriver vad gruppen arbetat med och ger exempel på hur systemet kan användas. Skall inte beskriva koden i detalj.

- *Titel och författare.* Kan börja med en kort sammanfattning men det är inte nödvändigt.
- *Introduktion* Beskrivning av problemet. Bakgrund och referenser. Vad skall göras i arbetet. Kort sammanfattning av de olika kapitlen.
- *Beskrivning av problemet* Mer detaljerad beskrivning. Inför matematisk notation. Beskriv lösningsmetoden matematiskt. *Implementation* kan antingen vara underrubrik eller eget kapitel.
- *Exempel* Hitta bra exempel som visar hur allt fungerar. Beskriv tydligt vad som kan ses ur exemplen. Både fall där metoden fungerar och där man ser begränsningar.

Mini-konferens

Presentera det ni gjort. Nivån skall vara sådan att övriga grupper förstår vad metoden bygger på.

- Varje grupp får 20 minuter att presentera. 5 minuter för frågor.
- Tänk på att presentera er. Alla skall delta i presentationen.
- Feedback på rapport och presentation ges direkt.