Tentamen i TAOP07 Optgrk Y den 18/3 -16: svar och kortfattade lösningar.

1. a) $\min x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}$

$$\text{då} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ \vdots \\ x_9 + x_{11} + x_{12} \geq 1 \\ x_{11} + x_{12} \geq 1 \\ x_8 + x_{12} \geq 1 \\ x_i = 0/1, \quad i = 1, \dots, 12 \end{cases}$$

b) $\min \sum_{i \in I} x_i$

$$\text{då} \begin{cases} \sum_{i \in P_k} x_i \geq 1, \quad k \in K \\ x_i = 0/1, \quad i \in I \end{cases}$$

där x_i definieras på samma sätt som i a).

c) Låt $y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om utrustning placeras i båda positionerna } i \text{ och } j, \text{ där } (i,j) \in IJ \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

$\min \sum_{i \in I} x_i$

$$\text{då} \begin{cases} \sum_{i \in P_k} x_i \geq 1, \quad k \in K \\ \sum_{(i,j) \in IJ} y_{ij} \geq 1 \\ 2y_{ij} \leq x_i + x_j, \quad (i,j) \in IJ \\ x_i = 0/1, \ i \in I, \text{ och } y_{ij} = 0/1, \ (i,j) \in IJ \end{cases}$$

2. a) $v^* = \min v = 12y_1 + 10y_2 + 9y_3$

$$\text{då} \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Primalt tillåtna lösningar ger pessimistiska uppskattningar av z^*, medan dualt tillåtna lösningar ger optimistiska uppskattningar av z^*.

Primala punkter:

$(1,2,1)$: tillåten med $z = 20 \Rightarrow z^* \geq 20$
$(3,0,0)$: tillåten med $z = 15 \Rightarrow z^* \geq 15$
$(2,2,0)$: otillåten

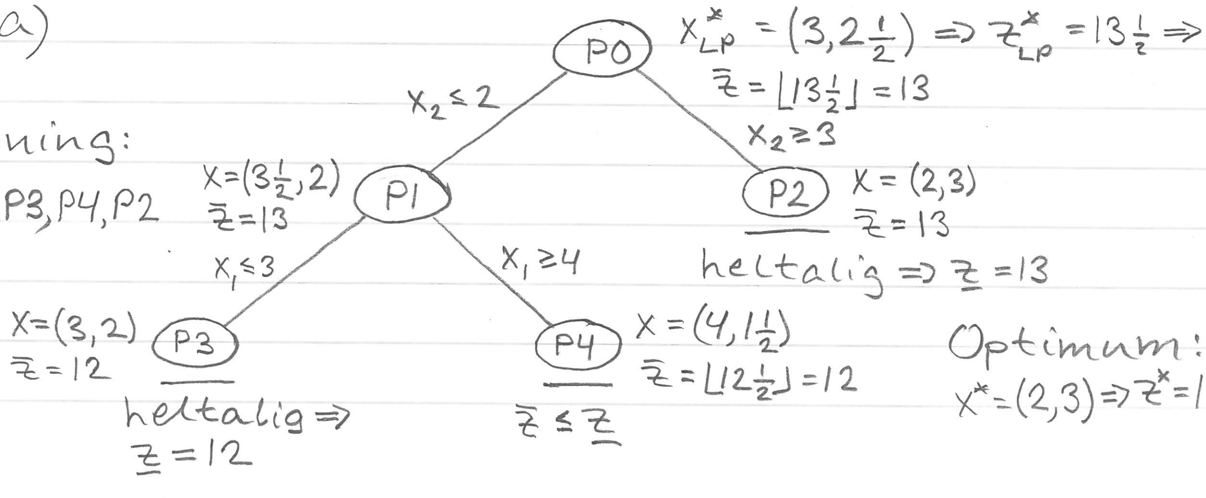
Duala punkter:

$(0,1,2)$: tillåten med $v = 28 \Rightarrow z^* \leq 28$
$(1,1,1)$: tillåten med $v = 31 \Rightarrow z^* \leq 31$
$(1,1,0)$: otillåten

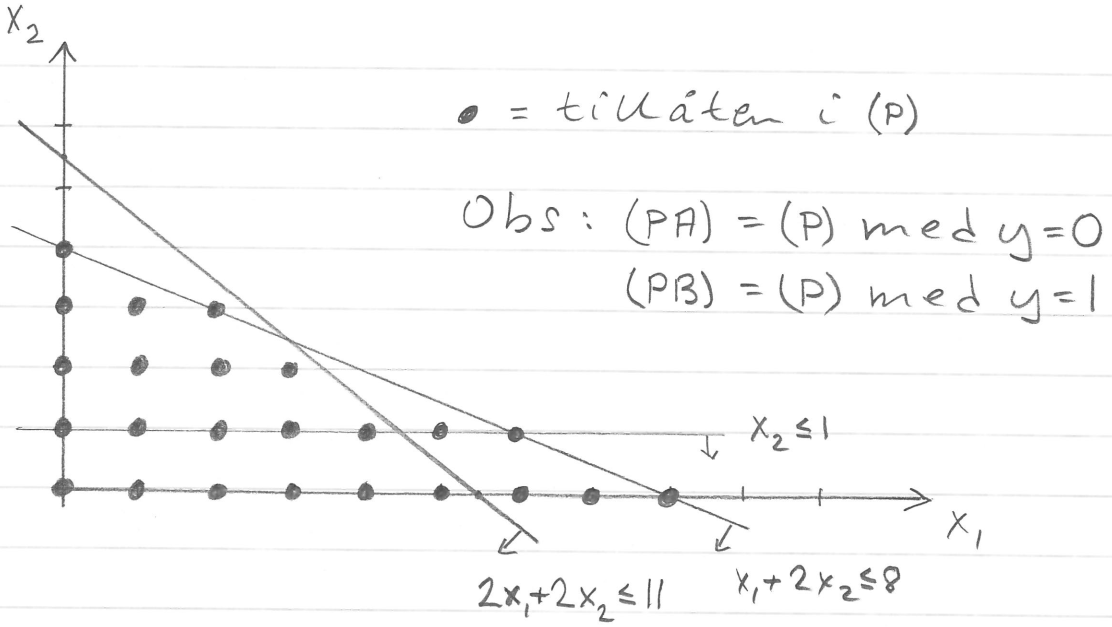
Alltså: $20 \leq z^* \leq 28$.

3. a)

Ordning:
P0, P1, P3, P4, P2



Optimum:
$x^* = (2,3) \Rightarrow z^* = 13$

b) 

Optimum för (PA): $x=(2,3)$ med $z_A^* = 13$
Optimum för (PB): $x=(8,0)$ med $z_B^* = 16$

Välj den bästa med avseende på $y=0/1$.

$y=0 \Rightarrow z = 13+6\cdot(1-0)+2\cdot 0 = 19$
$y=1 \Rightarrow z = 16+6\cdot(1-1)+2\cdot 1 = 18$

Alltså: $y^*=0,\ x^*=(2,3) \Rightarrow z^*=19$

4. a) $f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1+x_2)^2 \Rightarrow$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 + x_2 \\ x_1 + 2(1+x_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 12x_1^2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 6x_1^2+1 \pm \sqrt{(6x_1^2+1)^2 - (24x_1^2-1)}$$

För konvexitet: $\lambda \ge 0 \Leftrightarrow 24x_1^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$x_1^2 \ge \frac{1}{24} \Leftrightarrow |x_1| \ge \frac{1}{\sqrt{24}} \Leftrightarrow x_1 \ge \frac{1}{\sqrt{24}}$ eller $x_1 \le -\frac{1}{\sqrt{24}}$.

b) $\bar{d}_{MN} = -(\nabla^2 f(\bar{x}) + \nu I)^{-1} \nabla f(\bar{x}) = -\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d}_{NM} = (0,2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow \bar{d}_{NM}$ avtagande!

Alternativt: $\det(\nabla^2 f(\bar{x}) - \lambda I) = 0$ ger

$\lambda = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{min} = 1 - \sqrt{2}$

$\nu = 1 > |\lambda_{min}| = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x}) + \nu I$ är positivt definit $\Rightarrow \bar{d}_{NM}$ är en avtagenderiktning.

c) KKT-villkor för det riktningsbestämmande problemet:

$$\begin{cases} \nabla\left[f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d\right] + \nu \nabla\left(\frac{1}{2}\|d\|_2^2\right) = 0 & (1) \\ \nu \geq 0 & (2) \\ \nu\left(\frac{1}{2}\|d\|_2^2 - r\right) = 0 & (3) \\ \frac{1}{2}\|d\|_2^2 \leq r & (4) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) + \nabla^2 f(\bar{x}) d + \nu d = 0 \Rightarrow d = -(\nabla^2 f(\bar{x}) + \nu I)^{-1} \nabla f(\bar{x})$

För $\nu > 0$ och $r = \frac{1}{2}\|d\|_2^2$, där d ges av uttrycket ovan, är alltså Newton-Marquardt-riktningen en KKT-punkt för det riktningsbestämmande problemet.

5. a) Låt $x(t) = \bar{x} + td = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ där $d \neq 0$ och $t > 0$.

För vilka d gäller att $x(t)$ är tillåten för alla tillräckligt små t?

$x_1(t) + x_2(t) \leq 8 \Rightarrow t(d_1 + d_2) \leq 0 \underset{t>0}{\Rightarrow} d_1 + d_2 \leq 0$

$-(x_1(t) - 4)^2 + 4x_2(t) \leq 4 \Rightarrow \ldots \Rightarrow -4d_1 + 4d_2 \leq t d_1^2$
$\Rightarrow -4d_1 + 4d_2 \leq 0$, ty $t > 0$ och godtyckligt liten $\Rightarrow -d_1 + d_2 \leq 0$

$x_1(t), x_2(t) \geq 0$ gäller alltid för små $t > 0$!
Alltså: $d \neq 0$ sådana att $\begin{cases} d_1 + d_2 \leq 0 \\ -d_1 + d_2 \leq 0 \end{cases}$.

b) $f(x) = x_1 - x_2 \Rightarrow Df(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$d \neq 0$ är en avtagande riktning för $f(x)$ i punkten $\bar{x}$ om $Df(\bar{x})^T d < 0 \Leftrightarrow d_1 - d_2 < 0$.

Men för varje tillåten riktning gäller att $d_1 - d_2 \geq 0$, varför det inte finns någon tillåten avtagande riktning.

c) Låt $x(t) = \begin{pmatrix} 6 - t \\ 1 + \frac{1}{4}(t-2)^2 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

Då gäller att $x(0) = \bar{x}$ och för små $t \geq 0$ att

$$\begin{cases} x_1(t) + x_2(t) \leq 8 \\ -(x_1(t) - 4)^2 + 4x_2(t) = 4 \\ x_1(t),\ x_2(t) \geq 0, \end{cases}$$

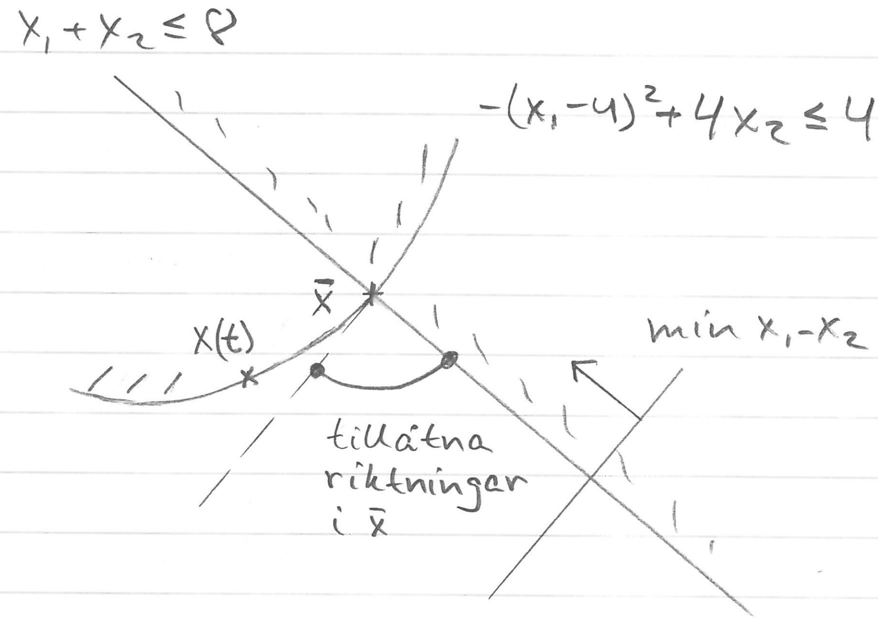
dvs att $x(t)$ är tillåten.

Punkten $x(t)$ ger målfunktionsvärdet

$$\varphi(t) = f(x(t)) = x_1(t) - x_2(t) = 4 - \tfrac{1}{4}t^2.$$

Men $\varphi(t) = 4 - \tfrac{1}{4}t^2 < \varphi(0) = f(\bar{x}) = 4$ då $t > 0$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ är <u>inte</u> ett lokalt minimum.



<u>6.</u>

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om båge } (i,j) \text{ tas med i trädet} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\min\ 13x_{12} + 6x_{13} + 7x_{14} + \dots + 11x_{46} + 7x_{56}$$

då $x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{34}+x_{35}+x_{36} \leq 3 \mid v \geq 0$

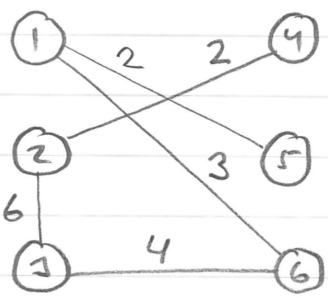
och $x_{ij} = 0/1$ bildar ett träd

Lagrange-relaxation:

$$h(v) = -3v + \min \; 13x_{12} + 6x_{13} + (7+v)x_{14} + (1+v)x_{15} + (2+v)x_{16} + 6x_{23} + (1+v)x_{24} + (6+v)x_{25} + (7+v)x_{26} + (6+v)x_{34} + (4+v)x_{35} + (3+v)x_{36} + 8x_{45} + 11x_{46} + 7x_{56}$$

då $x_{ij} = 0/1$ bildar ett träd

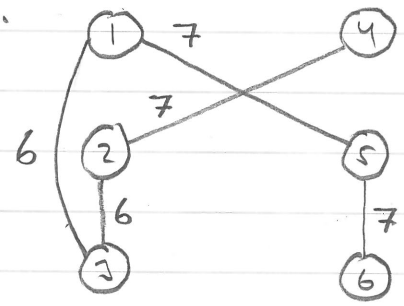
För $v = 1$ fås trädet:



$h(1) = -3+2+2+3+4+6 = 14$

4 bågar mellan nodmängderna ⇒ otillåtet!

För $v = 6$ fås trädet:



$h(6) = -18+6+6+7+7+7 = 15$

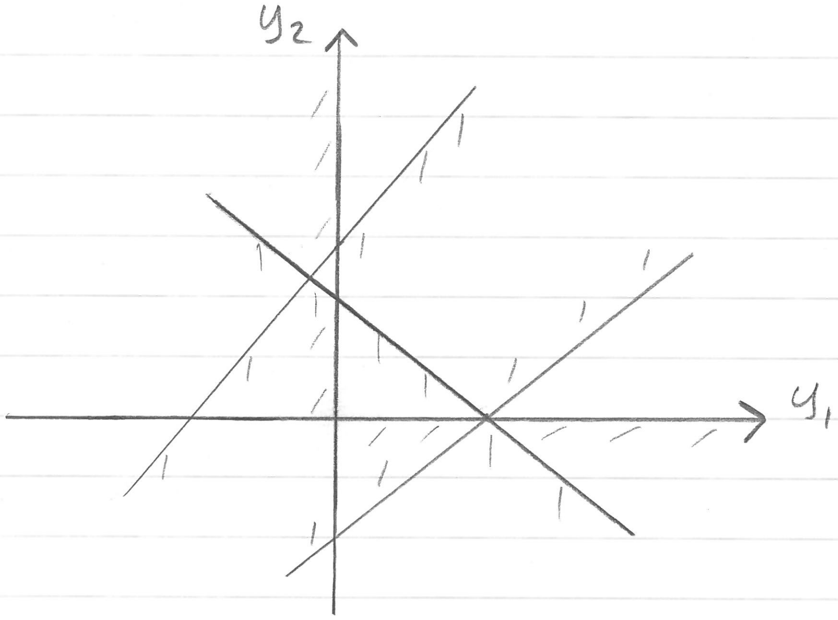
2 bågar mellan nodmängderna ⇒ tillåtet!

Tillåtna trädets kostnad $= 6+1+6+1+7 = 21$.

Optimalvärdet för det sidovillkorsbegränsade minimalträdsproblemet ligger alltså inom intervallet $[15, 21]$.

7. a) Dual: $v^* = \min v = 13y_1 + 17y_2$

$$\text{då} \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 1 \\ -4y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ 2y_1 - 2y_2 \geq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$



Dual problemet saknar tillåten lösning. Då gäller att det primala problemet endera har obegränsat optimum eller saknar tillåten lösning. Men det primala problemet har tillåten lösning (tex $x_1 = x_2 = x_3 = 0$), varför det måste ha obegränsat optimum. Sant!

b) Låt $x(t) = \bar{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

$\varphi(t) = f(x(t)) = t^4 + 5t^2 + 2t^2 - 2t^2 - 8t - 2t = t^4 + 5t^2 - 10t$

$\varphi'(t) = 4t^3 + 10t - 10$

$\varphi''(t) = 12t^2 + 10 > 0, \forall t \Rightarrow \varphi'(t)$ strängt växande (och $\varphi(t)$ strikt konvex)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'(t) \text{ strängt växande} \\ \varphi'(0) = -10 < 0 \\ \varphi'(1) = 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'(t) = 0 \text{ fås då } 0 < t < 1.$$

Falskt!

c) $f(x) = \ln(x^2+1) \Rightarrow f''(x) = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f(x)$ konvex då $f''(x) \leq 0$

$2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$

Falskt! ($f(x)$ är konvex då $|x| \leq 1$.)