Tentamen i TAOP07 Opt grk V den 7/6-17: kortfattade lösningar.

1. Variabler:

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ om kandidat } j \text{ anställs} \\ 0 \text{ annars} \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, 10$$

Modell: $\min z = 35x_1 + 50x_2 + \ldots + 40x_{10}$

$$\text{då} \begin{cases} x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 3 & (1) \\ x_2 + x_3 + x_9 \geq 1 & (2) \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 3 & (3) \\ x_4 + x_7 + x_8 \geq 1 & (4) \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 + x_{10} \geq 3 & (5) \\ x_1 + x_4 + x_5 \geq 1 & (6) \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} \geq & \\ \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) & (7) \\ x_1, x_2, \ldots, x_{10} = 0/1 & \end{cases}$$

Villkoren (1), (3) och (5) säkerställer tillräcklig kompetens. Villkoren (2), (4) och (6) säkerställer tillräcklig hög kompetens. Villkoret (7) säkerställer att minst hälften har certifiering. Villkor (7) kan även skrivas som

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} \geq x_1 + x_7 + x_9.$$

2. a) Dual: $\max v = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$

$$\begin{array}{ll|l}
\text{då} & y_1 + 2y_2 + y_3 \le c_1 & x_1 \\
& 3y_1 + y_2 + 2y_3 \le c_2 & x_2 \\
& y_1 + y_2 + 2y_3 \le c_3 & x_3 \\
& y_1, y_2, y_3 \ge 0 &
\end{array}$$

b) För att x^* ska vara tillåten måste

$$x_1^* + 3x_2^* + x_3^* = 3 + 3\cdot 2 + 0 = 9 \ge b_1$$
$$2x_1^* + x_2^* + x_3^* = 2\cdot 3 + 2 + 0 = 8 \ge b_2$$
$$x_1^* + 2x_2^* + 2x_3^* = 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 0 = 7 \ge b_3.$$

För att y^* ska vara tillåten måste

$$y_1^* + 2y_2^* + y_3^* = 4 + 2\cdot 1 + 0 = 6 \le c_1$$
$$3y_1^* + y_2^* + 2y_3^* = 3\cdot 4 + 1 + 2\cdot 0 = 13 \le c_2$$
$$y_1^* + y_2^* + 2y_3^* = 4 + 1 + 2\cdot 0 = 5 \le c_3.$$

För optimalitet krävs dessutom att komplementaritet gäller.

$$y_1^*(x_1^* + 3x_2^* + x_3^* - b_1) = 0 \Rightarrow b_1 = 9 \text{ ty } y_1^* > 0$$
$$y_2^*(2x_1^* + x_2^* + x_3^* - b_2) = 0 \Rightarrow b_2 = 8 \text{ ty } y_2^* > 0$$
$$y_3^*(x_1^* + 2x_2^* + 2x_3^* - b_3) = 0 \text{ ger inget ty } y_3^* = 0$$
$$x_1^*(c_1 - y_1^* - 2y_2^* - y_3^*) = 0 \Rightarrow c_1 = 6 \text{ ty } x_1^* > 0$$
$$x_2^*(c_2 - 3y_1^* - y_2^* - 2y_3^*) = 0 \Rightarrow c_2 = 13 \text{ ty } x_2^* > 0$$
$$x_3^*(c_3 - y_1^* - y_2^* - 2y_3^*) = 0 \text{ ger inget ty } x_3^* = 0$$

Alltså: $c_1 = 6, c_2 = 13, c_3 \ge 5$ och $b_1 = 9, b_2 = 8, b_3 \le 7$.

3. Nätverket är acykliskt och noderna är numrerade i topologisk ordning, varför delproblemen kan lösas genom direkt tillämpning av lämpliga versioner av Bellmans ekvationer.

a) $y_1 = 0$

$y_2 = \min\{y_1 + 2\} = 2$ för $p_2 = 1$

$y_3 = \min\{y_1 + 5\} = 5$ för $p_3 = 1$

$y_4 = \min\{y_2 + 6, y_3 + 4\} = \min\{8, 9\} = 8$ för $p_4 = 2$

$y_5 = \min\{y_2 + 4, y_4 + 3\} = \min\{6, 11\} = 6$ för $p_5 = 2$

$y_6 = \min\{y_3 + 3, y_4 + 6\} = \min\{8, 14\} = 8$ för $p_6 = 3$

$y_7 = \min\{y_5 + 3, y_6 + 2\} = \min\{9, 10\} = 9$ för $p_7 = 5$

Uppnystning: $7 \leftarrow 5 \leftarrow 2 \leftarrow 1$

BV: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ till kostnad 9.

b) $y_1 = 0$

$y_2 = \max\{y_1 + 2\} = 2$ för $p_2 = 1$

$y_3 = \max\{y_1 + 5\} = 5$ för $p_3 = 1$

$y_4 = \max\{y_2 + 6, y_3 + 4\} = \max\{8, 9\} = 9$ för $p_4 = 3$

$y_5 = \max\{y_2 + 4, y_4 + 3\} = \max\{6, 12\} = 12$ för $p_5 = 4$

$y_6 = \max\{y_3 + 3, y_4 + 6\} = \max\{8, 15\} = 15$ för $p_6 = 4$

$y_7 = \max\{y_5 + 3, y_6 + 2\} = \max\{15, 17\} = 17$ för $p_7 = 6$

Uppnystning: $7 \leftarrow 6 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 1$

Dyraste väg: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ till kostnad 17.

c) $y_1 = +\infty$

$y_2 = \max\{\min\{y_1, 2\}\} = 2$ för $p_2 = 1$

$y_3 = \max\{\min\{y_1, 5\}\} = 5$ för $p_3 = 1$

$y_4 = \max\{\min\{y_2, 6\}, \min\{y_3, 4\}\} =$
$= \max\{2, 4\} = 4$ för $p_4 = 3$

$y_5 = \max\{\min\{y_2, 4\}, \min\{y_4, 3\}\} =$
$= \max\{2, 3\} = 3$ för $p_5 = 4$

$y_6 = \max\{\min\{y_3, 3\}, \min\{y_4, 6\}\} =$
$= \max\{3, 4\} = 4$ för $p_6 = 4$

$y_7 = \max\{\min\{y_5, 3\}, \min\{y_6, 2\}\} =$
$= \max\{3, 2\} = 3$ för $p_7 = 5$

Uppnystning: $7 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 1$

Väg med maximal kapacitet:

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ med kapacitet 3.

4. a)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1-2x_1-x_2^2 \\ -2x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & -2x_2 \\ -2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix}$$

Studera egenvärdena till $\nabla^2 f(x)$.

$$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I) = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-2x_1-\lambda) - (-2x_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + (2+2x_1)\lambda + 4x_1 - 4x_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -(1+x_1) \pm \sqrt{(1+x_1)^2 - 4(x_1 - x_2^2)}$$

För konkavitet ska $\lambda_{1,2} \leq 0$ gälla.

Eftersom $\sqrt{(1+x_1)^2-4(x_1-x_2^2)} \geq 0$ så gäller att

$\lambda_{1,2} \leq 0 \iff -(1+x_1)+\sqrt{(1+x_1)^2-4(x_1-x_2^2)} \leq 0 \iff$

$\iff 1+x_1 \geq \sqrt{(1+x_1)^2-4(x_1-x_2^2)} \iff (1+x_1)^2 \geq (1+x_1)^2-4(x_1-x_2^2)$

$\iff x_1 \geq x_2^2$

Alltså: f är konkav då $x_1 \geq x_2^2$ gäller.

b) Newton-riktningen: $d_N = -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x}) =$

$$= -\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Avtagande eller växande längs d_N?

$\nabla f(\bar{x})^T d_N = (-5,-4)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{13}{2}$

$\nabla f(\bar{x})^T d_N > 0 \Rightarrow$ funktionen växer i

Newton-riktningen från punkten $\bar{x}$.

5. a) Låt $x(t) = \bar{x} + td$ där $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq 0$ och $t > 0$.
För vilka d är $x(t)$ tillåten för små värden på t?

$x_1(t) + 3x_2(t) = 2 + td_1 + 3(3 + td_2) = 11 + t(d_1 + 3d_2) \leq 11$
$\Rightarrow d_1 + 3d_2 \leq 0$ måste gälla
$2x_1(t) + x_2(t) = 2(2 + td_1) + 3 + td_2 = 7 + t(2d_1 + d_2) \leq 7$
$\Rightarrow 2d_1 + d_2 \leq 0$ måste gälla
$x_1(t) = 2 + td_1 \geq 0$ uppfyllt för alla d
$x_2(t) = 3 + td_2 \geq 0$ uppfyllt för alla d

Alltså: $d \neq 0$ sådana att $\begin{cases} d_1 + 3d_2 \leq 0 \\ 2d_1 + d_2 \leq 0. \end{cases}$

b) $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq 0$ är en avtagandriktning för funktionen f i $\bar{x}$ om $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -2 - 3(x_1 - 2x_2 + 4)^2 \\ -1 + 6(x_1 - 2x_2 + 4)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\bar{x})^T d = (-2, -1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -2d_1 - d_2 < 0 \Rightarrow 2d_1 + d_2 > 0$$

Eftersom villkoren $2d_1 + d_2 \leq 0$ och $2d_1 + d_2 > 0$ är motstridiga så finns det ingen tillåten avtaganderiktning.

c) Ingen slutsats kan dras från slutsatsen i deluppgift b, eftersom det finns en tillåten riktning med $\nabla f(\bar{x})^T d = 2d_1 + d_2 = 0$ och f inte är konvex. Studera därför hur f varierar i denna tillåtna riktning.

(Alla andra tillåtna riktningar är ascentriktningar, dvs ger växande värden på f.)

Låt $\bar{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $x(t) = \bar{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 3-2t \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

(Observera att $\bar{d}_1 + 3\bar{d}_2 < 0$ och $2\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = 0$.)

$$f(x(t)) = -2(2+t) - (3-2t) - (2+t-2(3-2t)+4)^3 =$$
$$= -7 - (5t)^3$$

Eftersom $f(x(t)) = -7 - (5t)^3 < -7 = f(x(0))$ gäller för godtyckligt små $t > 0$ så är $\bar{x}$ inte ett lokalt minimum.

6. Det Lagrange-relaxerade problemet separerar över x_1, x_2 och x_3:

$$h(u) = 50u + \min_{x_1 \geq 0} \left\{ \tfrac{1}{2}x_1^2 + (2-3u)x_1 \right\} +$$
$$+ \min_{x_2 \geq 0} \left\{ \tfrac{1}{2}x_2^2 + (5-2u)x_2 \right\} + \min_{x_3 \geq 0} \left\{ \tfrac{1}{2}x_3^2 + (3-u)x_3 \right\}$$

Varje delproblem är konvext. Finn minimum med hänsyn till icke-negativitet.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \tfrac{1}{2}x_1^2 + (2-3u)x_1 \right\} = 0 \Rightarrow x_1 = 3u-2 \text{ om } 3u-2 \geq 0,$$

annars fås minimum för $x_1 = 0$.

Alltså: $x_1(u) = \max\{0, 3u-2\}$. Analogt fås:

$x_2(u) = \max\{0, 2u-5\}$ och $x_3(u) = \max\{0, u-3\}$.

<u>$u=2$</u>: $x(2) = (\max\{0,4\}, \max\{0,-1\}, \max\{0,-1\}) =$

$= (4,0,0) \Rightarrow h(2) = 100-8+0+0 = 92 \Rightarrow z^* \geq 92$

$x(2)$ tillåten?

$3x_1(2) + 2x_2(2) + x_3(2) = 12+0+0 = 12 \not\geq 50 \Rightarrow$ nej!

<u>$u=5$</u>: $x(5) = (\max\{0,13\}, \max\{0,5\}, \max\{0,2\}) =$

$= (13,5,2) \Rightarrow h(5) = 250 - \frac{1}{2}13^2 - \frac{1}{2}5^2 - \frac{1}{2}2^2 = 151$

$\Rightarrow z^* \geq 151$

$x(5)$ tillåten?

$3x_1(5) + 2x_2(5) + x_3(5) = 39+10+2 = 51 \geq 50 \Rightarrow$ ja!

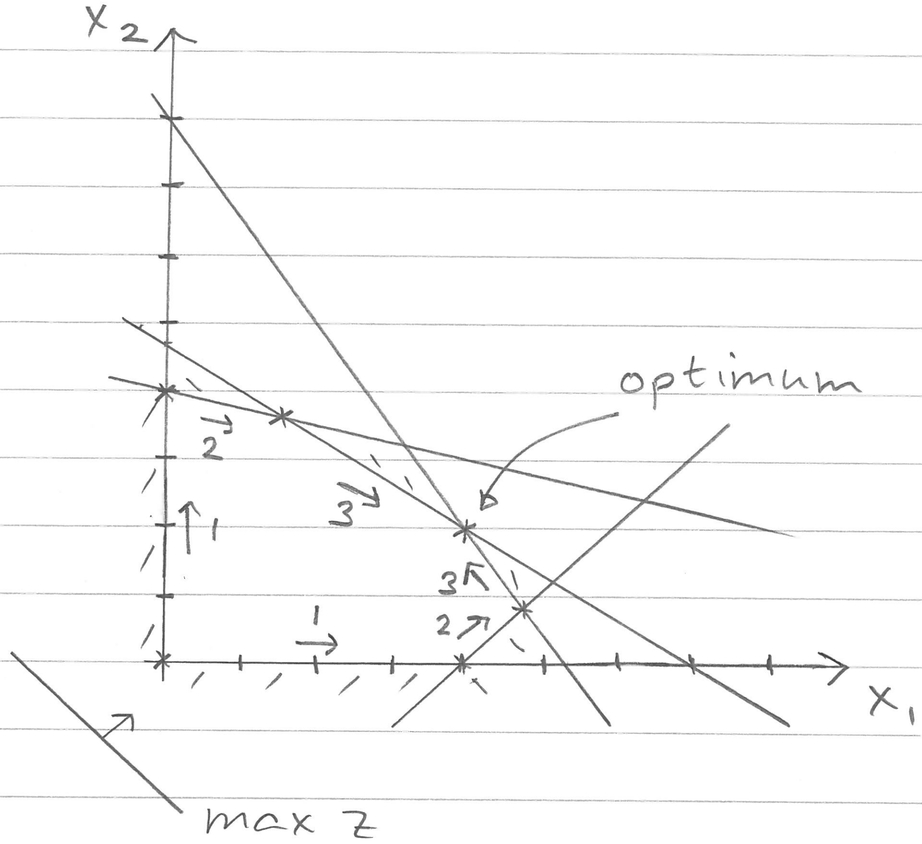
Primalt målfunktionsvärde:

$\frac{1}{2}x_1(5)^2 + \frac{1}{2}x_2(5)^2 + \frac{1}{2}x_3(5)^2 + 2x_1(5) + 5x_2(5) + 3x_3(5) =$

$= \frac{1}{2}\cdot 13^2 + \frac{1}{2}\cdot 5^2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 13 + 5\cdot 5 + 3\cdot 2 = 156 \Rightarrow z^* \leq 156$

Alltså: $151 \leq z^* \leq 156$

7. a) Studera problemet grafiskt.



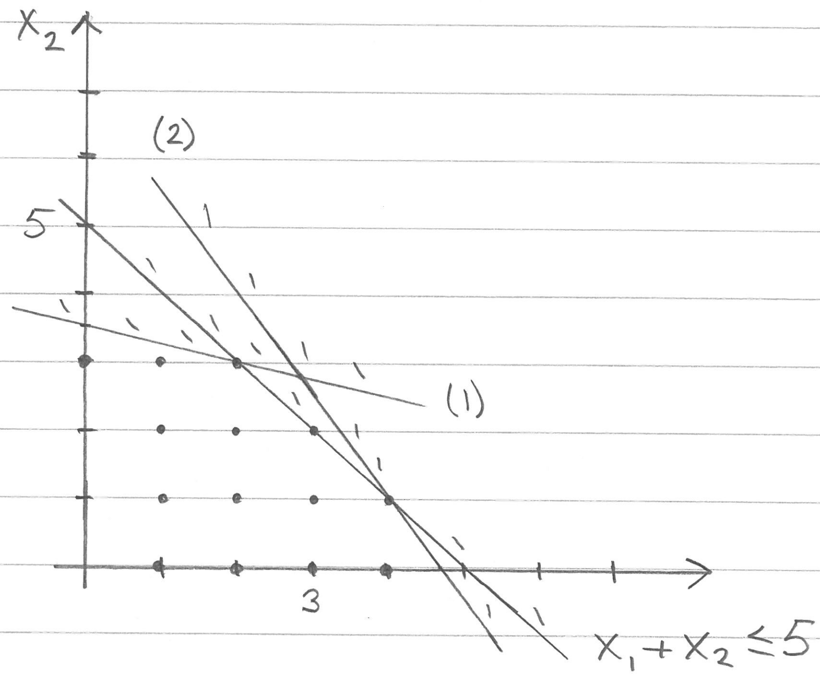
Simplexmetoden går mellan närliggande hörnpunkter. Utgående från origo kan man här starta med x_1 eller x_2 som första inkommande variabel (eftersom $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1 > 0$ gäller i startbasen), vilket ger två olika vägar till optimum. Båda vägarna ger tre iterationer. Alltså sant!

b) $$x_1 + 4x_2 \le 14 \quad (1)$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14 \quad (2)$$

$$(1) + 3\cdot(2) \Rightarrow 10x_1 + 10x_2 \le 56 \Rightarrow x_1 + x_2 \le 5\tfrac{6}{10} \quad (3)$$

Varje tillåten lösning till (1) & (2) måste alltså även uppfylla (3). Om x_1 och x_2 dessutom är heltal så är vänster led i (3) ett heltal, varför $x_1 + x_2 \leq 5$ måste gälla. Alltså sant!

Frågan kan alternativt studeras grafiskt.



I figuren ses att villkoret $x_1 + x_2 \leq 5$ inte skär bort någon av de heltalspunkter som uppfyller (1) & (2), varför varje tillåten heltalslösning till (1) & (2) även uppfyller $x_1 + x_2 \leq 5$.

c) Brantaste lutningsriktning: $d_{BL} = -\nabla f(\bar{x})$
Newton-riktning: $d_N = -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x})$

Om $\nabla^2 f(\bar{x}) = kI$ gäller så fås $d_N = -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x}) =$

$= -(kI)^{-1} \nabla f(\bar{x}) = -\frac{1}{k} I \nabla f(\bar{x}) = -\frac{1}{k} \nabla f(\bar{x}) = \frac{1}{k} d_{BL} \Rightarrow$

$d_{BL} = k d_N$, dvs d_{BL} är likriktad med d_N.

Dock kan d_{BL} vara likriktad med d_N även om $\nabla^2 f(\bar{x}) \neq kI$. Betrakta tex funktionen $f(x) = x_1 x_2$ och punkten $\bar{x} = (1,1)^T$.

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ger $d_N = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = d_B$.

Generellt gäller att $-\nabla f(x) = \nu(-\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x))$, där $\nu > 0$, inte implicerar att $\nabla^2 f(x) = kI$, $k > 0$, måste gälla.

Alltså falskt!