Tentamen i TAOP07 Opt grk I den 22/8-17: kortfattade lösningar.

1. Variabler:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{om frekvensband } i \text{ används,} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om kanal } j \text{ läggs på frekvensband } i, \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$$

Modell: $\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

då $\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \le b_i y_i, \quad i=1,\dots,m$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j=1,\dots,n$

$x_{ij} = 0/1, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

$y_i = 0/1, \quad i=1,\dots,m$

2. I: $x_4 = -5 \not\geq 0 \Rightarrow$ lösningen ej tillåten

III: $\bar{c}_1 = \frac{6}{7} \not\leq 0 \Rightarrow$ ej en optimaltablå

IV: $x = (\frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}, 0)$ uppfyller ej de ursprunglig bivillkoren $\Rightarrow$ lösningen ej tillåten

Alltså är Tablå II en optimaltablå.

3. a) En punkt är en hörnpunkt om den uppfyller villkoren och tre av dem uppfylls med likhet.

A: uppfyller inte $x_1+x_2+2x_3 \le 3 \Rightarrow$ ej hörnpunkt

B: uppfyller alla villkor och tre med likhet $\Rightarrow$ hörnpunkt

C: uppfyller alla villkor men endast två med likhet $\Rightarrow$ ej hörnpunkt

D: uppfyller alla villkor och tre med likhet $\Rightarrow$ hörnpunkt

Alltså: B och D är hörnpunkter.

b) $\min v = 2y_1 + 3y_2$

då
$$
\begin{aligned}
-y_1 + y_2 &\ge -4 \quad (1)\\
y_1 + y_2 &\ge 5 \quad (2)\\
-y_1 + 2y_2 &\ge 3 \quad (3)\\
y_1,\ y_2 &\ge 0 \quad (4)
\end{aligned}
$$

c) Komplementvillkor:

$$
\begin{aligned}
y_1(2+x_1-x_2+x_3) &= 0 \quad (i)\\
y_2(3-x_1-x_2-2x_3) &= 0 \quad (ii)
\end{aligned}
$$

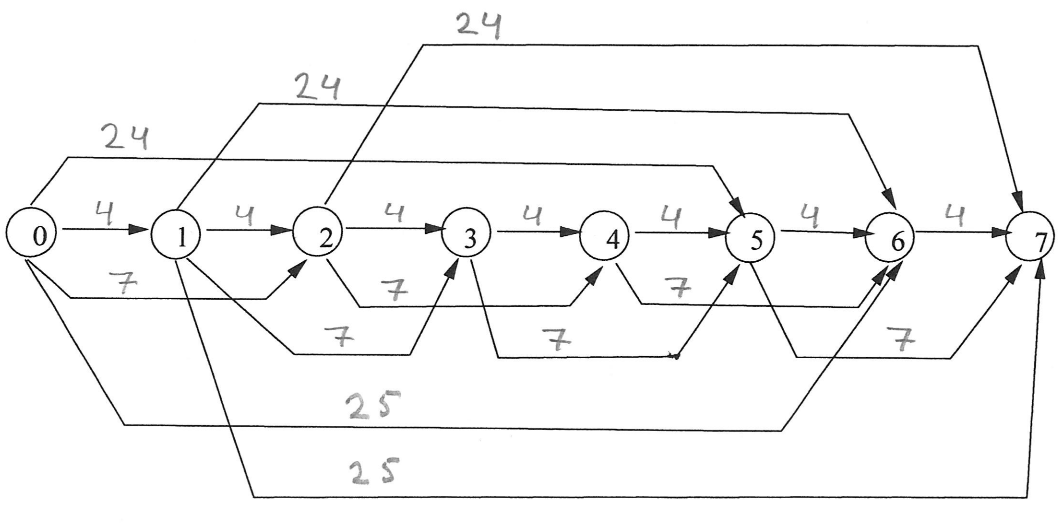
$$
\begin{aligned}
x_1(-y_1+y_2+4) &= 0 \quad (iii)\\
x_2(y_1+y_2-5) &= 0 \quad (iv)\\
x_3(-y_1+2y_2-3) &= 0 \quad (v)
\end{aligned}
$$

Punkt B ger $y_1 = 5$ och $y_2 = 0$, som inte uppfyller (1) och (3) $\Rightarrow$ B inte optimal.

Punkt D ger $y_1 = \frac{9}{2}$ och $y_2 = \frac{1}{2}$, som inte uppfyller (3) $\Rightarrow$ D inte optimal.

Varken B eller D är optimal.

4. Varje nod svarar mot ett värde på vänster led i bivillkoret. En båge svarar mot att ett variabelvärde ökar med en enhet och slutnoden för bågen ges av startnoden och bivillkorskoefficienten för variabeln. Varje väg från nod 0 till nod 7 ger en tillåten lösning till kappsäcksproblemet. Målfunktionskoefficienterna utgör bågkostnader och kappsäcksproblemet kan lösas genom sök en dyraste väg från nod 0 till nod 7.



Bellmans ekvationer:

$y_0 = 0$
$y_1 = \max\{0+4\} = 4, \quad p_1 = 0$
$y_2 = \max\{0+7, 4+4\} = 8, \quad p_2 = 1$
$y_3 = \max\{4+7, 8+4\} = 12, \quad p_3 = 2$
$y_4 = \max\{8+7, 12+4\} = 16, \quad p_4 = 3$
$y_5 = \max\{0+24, 12+7, 16+4\} = 24, \quad p_5 = 0$
$y_6 = \max\{0+25, 4+24, 16+7, 24+4\} = 28, \quad p_6 = 1$ (t ex)
$y_7 = \max\{4+25, 8+24, 24+7, 28+4\} = 32, \quad p_7 = 2$ (t ex)

En dyrasteväg ges av $0 \to 1 \to 2 \to 7$ med kostnad 32.

Optimum till kappsäcksproblemet:
$x_1^* = 0, \; x_2^* = 2, \; x_3^* = 0, \; x_4^* = 1 \Rightarrow z^* = 32.$

(Observera att alternativa dyraste vägar alla ger en och samma optimallösning till kappsäcksproblemet.)

5. a)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_2 - 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$x^0 = (0,0)^T \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x^1(t) = x^0 + t d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = f(x^1(t)) = 4(2t)^2 + 2(-t)^2 + 4(2t)(-t) - 2(2t) + (-t)$$

$$\varphi'(t) = 32t + 4t - 16t - 4 - 1 = 20t - 5 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{4}$$

$\varphi''(t) = 20 \geq 0 \Rightarrow$ minimum

$$x^1 = x^1(t_0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow f(x^1) = -\frac{5}{8} < 0 = f(x^0)$$

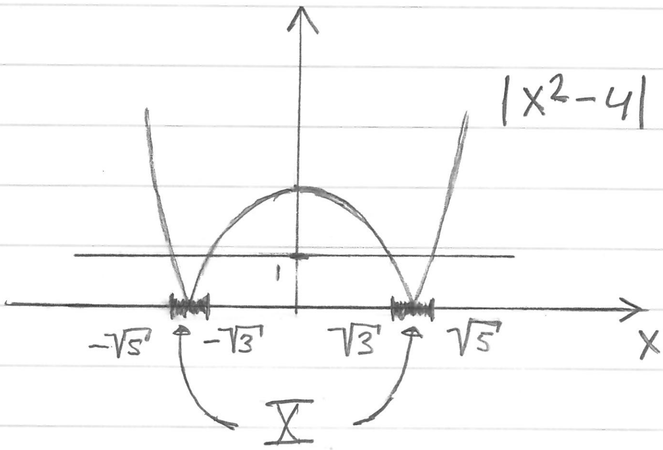
$$d^1 = -\nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} 8 \cdot \frac{1}{2} + 4\left(-\frac{1}{4}\right) - 2 \\ 4 \cdot \frac{1}{2} + 4\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $X = \{x \in R^2 \mid |x^2 - 4| \leq 1\} = \{x \in R^2 \mid -1 \leq x^2 - 4 \leq 1\} =$

$= \{x \in R^2 \mid -\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{3}$ eller $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5}\}$

$-2 \in X$ och $2 \in X$, men $\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(2) = 0 \notin X \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ inte konvex



6. Lagrange-relaxerat problem:

$$h(u) = \min_{\text{då } x_1, x_2, x_3 \in \{1,2,3,4,5\}} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + u(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 21) =$$

$$= -21u + \min_{\text{då } x_1 \in \{1,..,5\}} (f_1(x_1) + 2ux_1) + \min_{\text{då } x_2 \in \{1,..,5\}} (f_2(x_2) + 3ux_2) + \min_{\text{då } x_3 \in \{1,..,5\}} (f_3(x_3) + 4ux_3)$$

Lagrange-dualt problem: $h^* = \max_{u \geq 0} h(u)$.

$h(1) = -21 + \min_{\text{då } x_1 \in \{1,..,5\}} (f_1(x_1) + 2x_1) + \min_{\text{då } x_2 \in \{1,..,5\}} (f_2(x_2) + 3x_2) + \min_{\text{då } x_3 \in \{1,..,5\}} (f_3(x_3) + 4x_3)$

$= -21 + \min\{30+2, 27+4, 24+6, 21+8, 20+10\} +$

$+ \min\{30+3, 24+6, 17+9, 12+12, 8+15\} +$

$+ \min\{30+4, 17+8, 10+12, 5+16, 3+20\}$

$= -21 + 29 + 23 + 21 = 52$ för $x(1) = (4, 5, 4)$

$\Rightarrow z^* \geq 52$

$x(1)$ tillåten?

$2x_1(1) + 3x_2(1) + 4x_3(1) = 8 + 15 + 16 = 39 \not\leq 21 \Rightarrow$ nej!

Analogt fås:

$h(2) = -42 + \min\{34, 35, 36, 37, 40\} +$

$+ \min\{36, 36, 35, 36, 38\} + \min\{38, 33, 34, 37, 43\} =$

$= -42 + 34 + 35 + 33 = 60$ för $x(2) = (1, 3, 2)$

$\Rightarrow z^* \geq 60$

$x(2)$ tillåten?

$2x_1(2) + 3x_2(2) + 4x_3(2) = 2 + 9 + 8 = 19 \leq 21 \Rightarrow$ ja!

$\Rightarrow z^* \leq f_1(x_1(2)) + f_2(x_2(2)) + f_3(x_3(2)) =$

$= f_1(1) + f_2(3) + f_3(2) = 30 + 17 + 17 = 64$

Slutsats: $60 \leq z^* \leq 64$

7. a) Optimal duallösning: $y^T = c_B^T B^{-1} =$

$= (40, 100) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (40, 100) \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (52, -4)$

$y_2 = -4 \Rightarrow z^*$ kommer att minska

med 4 enheter. Falskt!

b) Den bästa kända heltalslösningen har $z=22$, varför det optimala målfunktionsvärdet säkert inte är sämre (lägre) än så, utan eventuellt bättre. Målfunktionsvärdet i subproblem 5, $z=24,6$, utgör en optimistisk skattning för målfunktionsvärden för tillåtna heltalslösningar som kan hittas från subproblemet. Eftersom vänster gren inte studerats ytterligare så skulle det alltså där möjligen gå att hitta en heltalslösning med $z=24,6$. Sant!

c) Studera andraderivatan!

$f(x) = (\alpha^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(\alpha^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) =$

$$= \frac{x}{(a^2-x^2)^{3/2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{(a^2-x^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(a^2-x^2)^{1/2}(-2x)}{(a^2-x^2)^3} =$$

$$= \frac{(a^2-x^2)^{3/2} + 3x^2(a^2-x^2)^{1/2}}{(a^2-x^2)^3}$$

$|x| < a \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ konvex

Falskt!