Tentamen i TAOP07 Opt grk Y den 17/3-18: kortfattade lösningar.

1. a) Variabler: x_j = antal poäng som ges på uppgift j, $j=1,2,3$

Modell: $\max z = 0{,}50x_1 + 0{,}40x_2 + 0{,}30x_3$

$$
\begin{aligned}
\text{då } \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\
& 0{,}25x_1 + 0{,}50x_2 + 0{,}50x_3 \geq 40 \\
& x_1 \geq 20 \\
& x_2 \geq 20 \\
& x_3 \geq 30 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

b) Inför $x_1' = x_1 - 20$, $x_2' = x_2 - 20$ och $x_3' = x_3 - 30$.

Problemet transformeras då till

$\max z = 0{,}50x_1' + 0{,}40x_2' + 0{,}30x_3' + 27$

$$
\begin{aligned}
\text{då } \quad & x_1' + x_2' + x_3' = 30 \\
& 0{,}25x_1' + 0{,}50x_2' + 0{,}50x_3' \geq 10 \\
& x_1', x_2', x_3' \geq 0
\end{aligned}
$$

Den givna optimallösningen svarar mot $x_1' = 20$, $x_2' = 10$ och $x_3' = 0$, med

optimalbasen $x_B = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$.

Den komplementära optimala duallösningen ges av

$$y^T = c_B^T B^{-1} = (0{,}50 \quad 0{,}40) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}50 \end{pmatrix}^{-1} = (0{,}60 \quad -0{,}40)$$

En sänkning av kravet 40 poäng till 39 poäng gör alltså att den förväntade poängen ökar med $(39-40)(-0{,}40) = 0{,}40$ poäng.

2. a) En tillåten baslösning ska vara tillåten i samtliga villkor och innehålla högst $m=2$ noll-skilda variabler.

A: är tillåten men innehåller 3 noll-skilda variabler ⇒ ej en tillåten baslösning

B: är tillåten och innehåller 2 noll-skilda variabler ⇒ tillåten baslösning

C: otillåten, ty $x_4 < 0$

Alltså: endast B är en tillåten baslösning.

b) $\max\ w = 5y_1 + 4y_2$

då
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \le 5 & x_1 \\ y_1 + 2y_2 \le 7 & x_2 \\ 3y_1 + y_2 \le 11 & x_3 \\ y_1 - y_2 \le 3 & x_4 \\ y_1, y_2 \text{ fria} & \end{cases}$$

c) Komplementvillkor:

$$x_1(5-y_1-y_2)=0$$
$$x_2(7-y_1-2y_2)=0$$
$$x_3(11-3y_1-y_2)=0$$
$$x_4(3-y_1+y_2)=0$$

Undersök de två tillåtna lösningarna.

A: $x=(1,1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=5 \\ y_1+2y_2=7 \\ 3y_1+y_2=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=3 \\ y_2=2 \end{cases}$

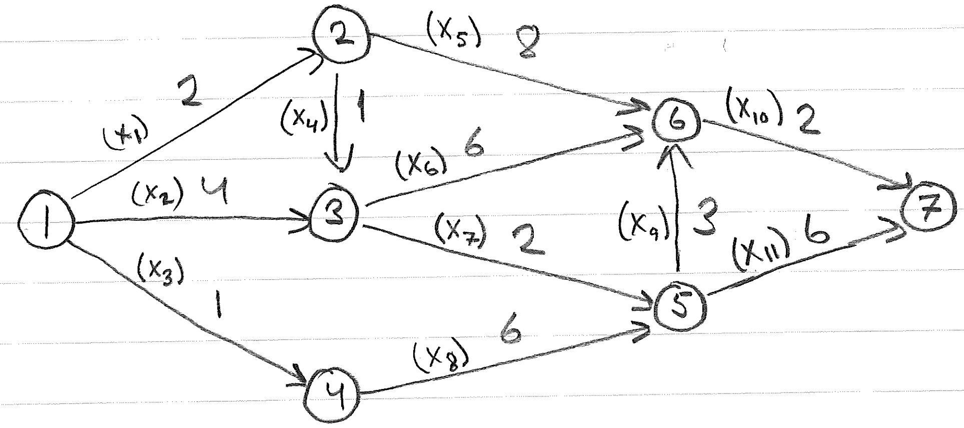
som är tillåten i dualen $\Rightarrow$ primala punkten är optimal

B: $x=(\frac{9}{2},0,0,\frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=5 \\ y_1-y_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=4 \\ y_2=1 \end{cases}$

som inte är tillåten i dualen (ty $3y_1+y_2=12+1=13 \nleq 11$) $\Rightarrow$ primala punkten är inte optimal

Alltså: endast A är optimal.

3. Bivillkorsmatrisen utgör en anslutningsmatris för ett riktat nätverk med 7 noder och 11 bågar. Problemet svarar mot att finna en billigaste väg från nod 1 till nod 7.



Acykliskt nätverk ⇒ Bellmans ekvationer kan användas. Avsök noderna i topologisk ordning, vilken här ges av den givna nodnumreringen.

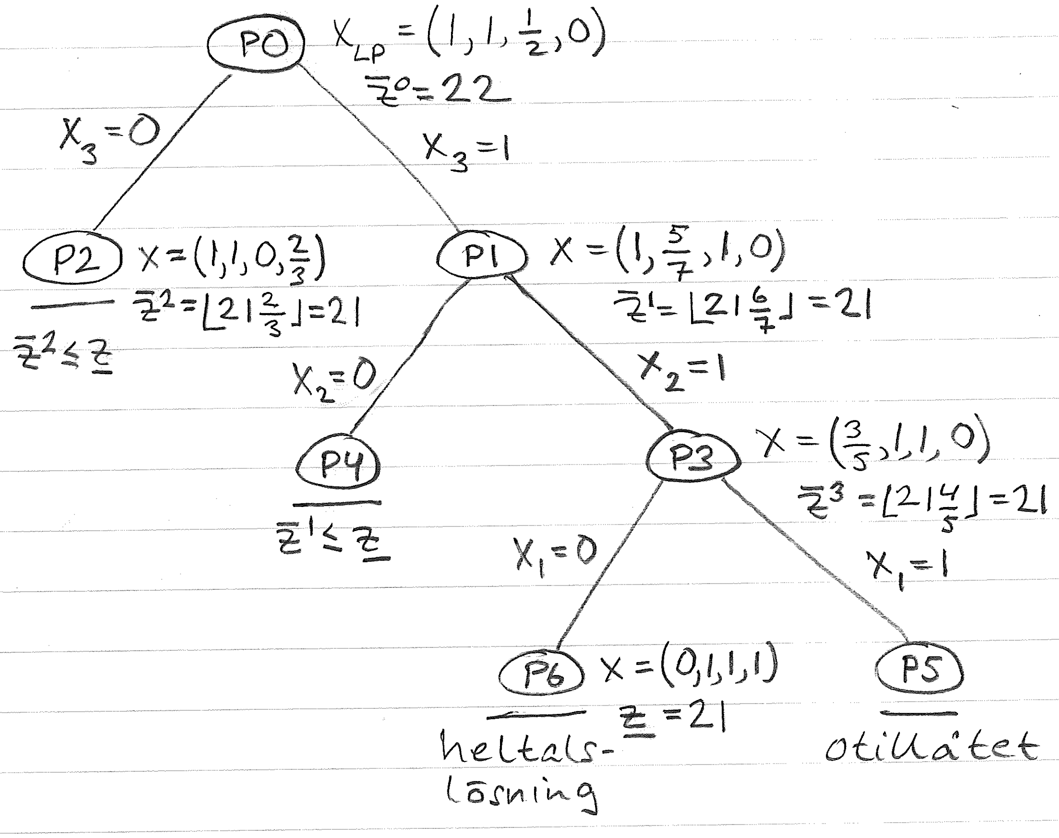
(Topologisk numrering: för alla bågar (i,j) gäller att $j > i$.)

$y_1 = 0, \quad p_1 = -$
$y_2 = 0 + 2 = 2, \quad p_2 = 1$
$y_3 = \min\{0+4, 2+1\} = 3, \quad p_3 = 2$
$y_4 = 0 + 1 = 1, \quad p_4 = 1$
$y_5 = \min\{3+2, 1+6\} = 5, \quad p_5 = 3$
$y_6 = \min\{2+8, 3+6, 5+3\} = 8, \quad p_6 = 5$
$y_7 = \min\{5+6, 8+2\} = 10, \quad p_7 = 6$

Uppnystning ger billigaste vägen:
$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7$ med kostnad 10.

Optimum till det givna problemet:
$x_1^* = x_4^* = x_7^* = x_9^* = x_{10}^* = 1$ och $x_2^* = x_3^* = x_5^* = x_6^* =$
$= x_8^* = x_{11}^* = 0$ med $z^* = 10$.

4.



Avsökningsordning: P0 – P1 – P3 – P5 – P6 – P4 – P2

Optimum: $x^*=(0,1,1,1) \Rightarrow z^*=21$

5. a) $f(x)=\frac{3}{2}x_1^2-4x_1x_2-\frac{3}{2}x_2^2+\nu(x_1^2+x_2^2) \Rightarrow$

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}3x_1-4x_2+2\nu x_1\\ -4x_1-3x_2+2\nu x_2\end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}3+2\nu & -4\\ -4 & -3+2\nu\end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(x)-\lambda I)=\begin{vmatrix}3+2\nu-\lambda & -4\\ -4 & -3+2\nu-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2-4\nu\lambda+4\nu^2-25=0 \Rightarrow \lambda=2\nu\pm\sqrt{4\nu^2-(4\nu^2-25)}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}=2\nu\pm 5$$

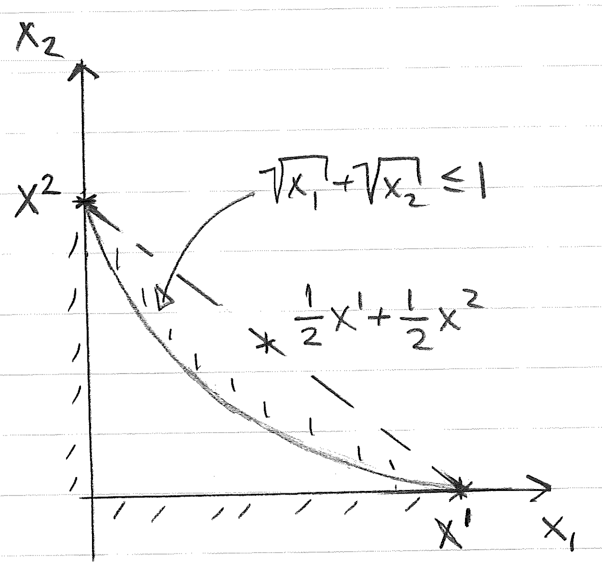
$f(x)$ är konvex på $\mathbb{R}^2$ omm $\lambda_{1,2}\geq 0$, dvs omm $\nu\geq\frac{5}{2}$.

b) X är inte konvex.

Välj t.ex. $x^1 = \binom{1}{0} \in X$ och

$x^2 = \binom{0}{1} \in X$ samt

$\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$. Då fås:



$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = \frac{1}{2}\binom{1}{0} + \frac{1}{2}\binom{0}{1} = \frac{1}{2}\binom{1}{1}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \not\leq 1$

$\Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \notin X$.

c) Låt $x^1, x^2 \in X_1 \cap X_2$ och $\lambda \in [0,1]$.

$x^1, x^2 \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow x^1, x^2 \in X_1$ och $x^1, x^2 \in X_2$.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \text{ konvex} \Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_1 \\ X_2 \text{ konvex} \Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow X_1 \cap X_2$ konvex.

6. Problemet kan skrivas som

$$\min x_2$$

$$\text{då } 1 - \frac{1}{e}(1 + \ln x_1) - x_2 \leq 0$$

$$1 + \frac{1}{2}\left(ex_1^2 - \frac{1}{e}\right) - x_2 \leq 0$$

KKT-villkor:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x_1} \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} e x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (1) \\ y_1, y_2 \geq 0 & (2) \\ 1 - \frac{1}{e}(1 + \ln x_1) - x_2 \leq 0 & \\ & (3) \\ 1 + \frac{1}{2}\left(e x_1^2 - \frac{1}{e}\right) - x_2 \leq 0 & \\ y_1 \left[1 - \frac{1}{e}(1 + \ln x_1) - x_2\right] = 0 & \\ & (4) \\ y_2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(e x_1^2 - \frac{1}{e}\right) - x_2\right] = 0 & \end{cases}$$

För punkten $\bar{x} = \left(\frac{1}{e}, 1\right)^T$ fås:

$$1 - \frac{1}{e}(1 + \ln \bar{x}_1) - \bar{x}_2 = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \ln \frac{1}{e}\right) - 1 = 0$$

$$1 + \frac{1}{2}\left(e \bar{x}_1^2 - \frac{1}{e}\right) - \bar{x}_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(e \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right) - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ (3) och (4) är uppfyllda.

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{e}, 1\right)^T \text{ i } (1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (2) är uppfyllda

Alltså: $\bar{x} = \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ är en KKT-punkt.

7. a) Lagrange-relaxation:

$$h(u) = \min 33x_1 + 17x_2 + 20x_3 + 19x_4 + 13x_5 + u(13 - 8x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 7x_4 - 5x_5) =$$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0/1$

$$= 13u + \min (33-8u)x_1 + (17-4u)x_2 + (20-6u)x_3 + (19-7u)x_4 + (13-5u)x_5$$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0/1$

$$h(4) = 52 + \min x_1 + x_2 - 4x_3 - 9x_4 - 7x_5 =$$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0/1$

$= 52 - 4 - 9 - 7 = 32$ för $x(4) = (0,0,1,1,1)$

$\Rightarrow z^* \geq 32$

$x(4)$ tillåten?

$8x_1(4) + 4x_2(4) + 6x_3(4) + 7x_4(4) + 5x_5(4) =$

$= 0 + 0 + 6 + 7 + 5 = 18 \geq 13 \Rightarrow$ ja!

$x(4)$ tillåten $\Rightarrow z^* \leq 20 + 19 + 13 = 52$

Alltså: $z^* \in [32, 52]$. Sant!

b) $\left.\begin{array}{l} x_1 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_5 = \frac{10}{3} \\ x_1, x_3, x_5 \geq 0 \text{ och heltal} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 + \lfloor -\frac{4}{3} \rfloor x_3 + \lfloor \frac{7}{3} \rfloor x_5 \leq \lfloor \frac{10}{3} \rfloor \Rightarrow x_1 - 2x_3 + 2x_5 \leq 3$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_5 = \frac{10}{3} \\ x_1, x_3, x_5 \geq 0 \text{ och heltal} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + \lceil -\tfrac{4}{3} \rceil x_3 + \lceil \tfrac{7}{3} \rceil x_5 \geq \lceil \tfrac{10}{3} \rceil \Rightarrow x_1 - x_3 + 3x_5 \geq 4$$

Sant!

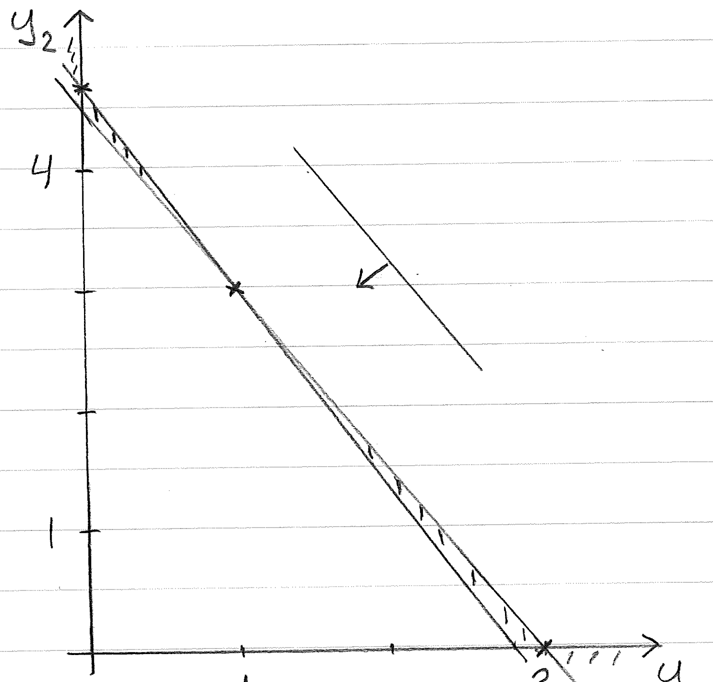
c) $\frac{\partial v(19,12)}{\partial b_1}$ och $\frac{\partial v(19,12)}{\partial b_2}$ ges av en optimal

duallösning för $b_1 = 19$ och $b_2 = 12$.

Duelt problem för $b_1 = 19$ och $b_2 = 12$:

$$\begin{array}{ll} \min\ 19y_1 + 12y_2 & \\ \text{då } \begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geq 14 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 9 \\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{cases} & \left|\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \\ \end{array}\right. \end{array}$$

Grafisk lösning:



Svårt att se vilken av de tre hörnpunkterna

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 14/3 \end{pmatrix}$

som är optimal. Beräkna deras målfunktionsvärden!

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 19 \cdot 3 + 12 \cdot 0 = 57$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 19 \cdot 1 + 12 \cdot 3 = 55$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 14/3 \end{pmatrix} \Rightarrow 19 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{14}{3} = 56$

Alltså: $\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Falskt!