Tentamen i TAOP07 Opt grk Y den 5/6-18: kortfattade lösningar.

1. Låt $z_i = \begin{cases} 1 \text{ om cirkelskivan täcker punkt } i \\ 0 \text{ annars}, \quad i=1,\ldots,m. \end{cases}$

Modell: $\min r$

$$\text{då } (x^i - x)^2 + (y^i - y)^2 \leq r^2 + M(1 - z_i), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \geq p$$

$$r \geq 0$$

där M är ett stort positivt tal.

2. a) Beteckna optimala duallösningen med y^*.

Komplementaritet ger att $\begin{cases} 2y_1^* - 3y_2^* = 5 \\ -y_1^* + y_2^* = -2 \end{cases}$

ska gälla, oavsett vad R_1 och R_2 ska vara.

$$\left.\begin{array}{l} 2y_1^* - 3y_2^* = 5 \\ -y_1^* + y_2^* = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 1 \\ y_2^* = -1 \end{cases}$$

b) $y_1^* = 1 \neq 0$ och $y_2^* = -1 \neq 0$ samt komplementaritet

ger att $\left.\begin{array}{l} 2x_1^* - x_2^* + x_3^* = b_1 \\ -3x_1^* + x_2^* - x_3^* = b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -3 \\ b_2 = 4 \end{cases}$

Eftersom R_1 och R_2 står för $\leq$ eller $\geq$ så är dualvariablerna teckenbegränsade.

Eftersom y^* är tillåten så måste kraven vara $y_1 \geq 0$ och $y_2 \leq 0$.

Eftersom x_3 är teckenbegränsad så är motsvarande duala villkor av typen $\leq$ eller $\geq$. Eftersom y^* är tillåten och $y_1^* - y_2^* = 2 \leq 3$ så ses villkoret av $y_1 - y_2 \leq 3$.

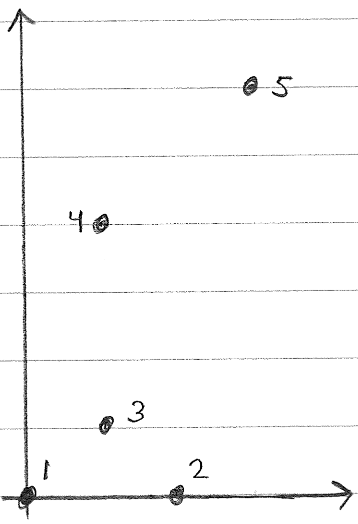
Men $x_3 \leq 0$ och $y_1 - y_2 \leq 3 \Rightarrow$ det duala problemet är av minimeringstyp $\Rightarrow$ det primala problemet är a maximeringstyp.

Primalen maximering och $y_1 \geq 0 \Rightarrow R_1$ är $\leq$.
Primalen maximering och $y_2 \leq 0 \Rightarrow R_2$ är $\geq$.

Alltså: $\max z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_2$

$$\text{då} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq -3 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

3. a)

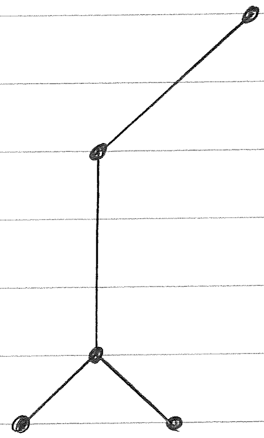


Avståndsmatris:

$$\begin{pmatrix} - & 2 & \sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{45} \\ - & - & \sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{37} \\ - & - & - & 3 & \sqrt{29} \\ - & - & - & - & \sqrt{8} \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Finn ett billigaste uppspännande träd.
Använd tex Kruskals algoritm.

båge	kostnad	
(1,3)	$\sqrt{2}$	välj
(2,3)	$\sqrt{2}$	välj
(1,2)	2	cykel
(4,5)	$\sqrt{8}$	välj
(3,4)	3	välj



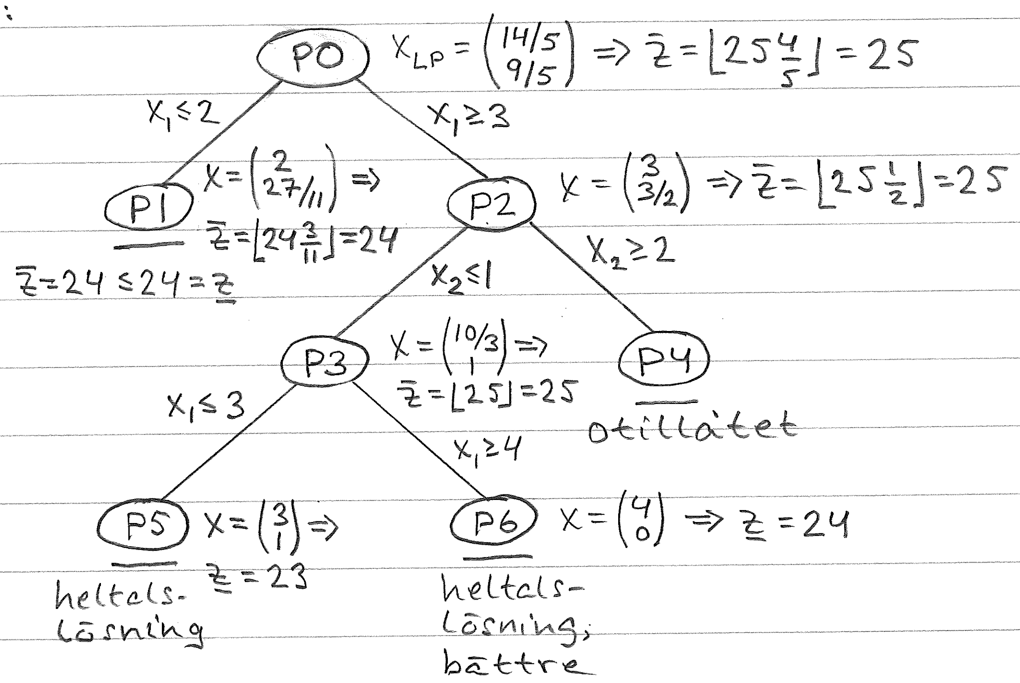
$5-1=4$ bågar valda $\Rightarrow$ träd

Koppla ihop punkterna (0,0) med (1,1), (1,1) med (2,0), (1,4) med (3,6), samt (1,1) med (1,4), till kostnad $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{8}+3 =$
$= 3+4\sqrt{2}$.

b) Om en båge i ett billigaste uppspännande träd tas bort så delas alltid noderna i två mängder som inte är ihopkopplade. Den borttagna bågen måste vara en billigaste båge mellan de två nodmängderna, ty annars skulle nodmängderna kunna kopplas ihop på ett billigare sätt, vilket skulle skapa ett uppspännande träd som är billigare än det ursprungliga trädet, vilket skulle motsäga att detta var ett billigaste uppspännande träd. För att de två skapade nodmängderna ska ligga så långt ifrån varandra som möjligt, enligt den givna beskrivningen, så ska alltså den dyraste bågen i trädet tas bort. Om problemet lösts med Kruskals algoritm så ska alltså den sist valda bågen tas bort. Här ska bågen (3,4) tas bort, varigenom de fem punkterna delas upp i mängderna $\{(0,0), (2,0), (1,1)\}$ och $\{(1,4), (2,6)\}$.

4. Ordning:

P0
P1
P2
P3
P5
P6



Optimum: $x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ med $z^* = 24$.

5. a)

$$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 4 =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{5} \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ konvex på } R^2$$

b) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2-5 \\ 4x_2+2x_1-5 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1(t) = x^0 + td^0 = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$

$\varphi(t) = f(x^1(t)) = (1+t)^2 + 2(1-t)^2 + 2(1+t)(1-t) - 5(1+t) - 5(1-t)$

$\varphi'(t) = 2t-2 \begin{cases} <0 \text{ om } t<1 \\ >0 \text{ om } t>1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2(t) = x^1 + td^1 = \begin{pmatrix} 2+t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$

$\varphi(t) = f(x^2(t)) = (2+t)^2 + 2t^2 + 2(2+t)t - 5(2+t) - 5t$

$\varphi'(t) = 10t-2 \begin{cases} <0 \text{ om } t<\frac{1}{5} \\ >0 \text{ om } t>\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x^2 = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ inte optimum

Alltså: $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $f(x^0) = -5$

$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ med $f(x^1) = -6$

$x^2 = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ med $f(x^2) = -6\frac{1}{5}$

6. a) Lagrange-relaxerat problem:

$$\begin{aligned} h(u) = \min\ & -12x_1 - 15x_2 - 18x_3 - 11x_4 - 20x_5 - 19x_6 + \\ & + u_1(4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 6x_5 + 7x_6 - 11) + \\ & + u_2(2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 2x_6 - 10) \\ \text{då}\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0/1 \end{aligned}$$

$$h(1,3) = \min -2x_1 + 0x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 - 6x_6 - 41 =$$

$$\text{då } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$x_1, \dots, x_6 = 0/1$$

$$= -2 - 2 - 6 - 41 = -51 \text{ för } x(1,3) = (1,0,0,0,1,1)$$

$$h(2,2) = \min 0x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 0x_5 - x_6 - 42 =$$

$$\text{då } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$x_1, \dots, x_6 = 0/1$$

$$= -1 - 3 - 1 - 42 = -47 \text{ för } x(2,2) = (0,1,0,1,0,1)$$

$$h(u) \leq z^*, \ \forall u \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} z^* \geq h(1,3) = -51 \\ z^* \geq h(2,2) = -47 \end{cases} \Rightarrow z^* \geq -47$$

Är $x(1,3)$ eller $x(2,2)$ tillåten i det ursprungliga problemet? Undersök!

$$x(1,3) = (1,0,0,0,1,1): \begin{cases} 4+6+7 = 17 \not\leq 11 \\ 2+4+2 = 8 \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \text{nej!}$$

$$x(2,2) = (0,1,0,1,0,1): \begin{cases} 3+1+7 = 11 \leq 11 \\ 4+3+2 = 9 \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \text{ja!}$$

$x(2,2) = (0,1,0,1,0,1)$ tillåten $\Rightarrow z^* \leq -15 - 11 - 19 = -45$

Alltså: $-47 \leq z^* \leq -45$

b) (i) Giltig olikhet, ty $x_5 = x_6 = 1$ i det första villkoret ger $VL \geq 6+7 = 13 \not\leq 11$, varför $x_5 + x_6 \leq 1$ måste gälla i varje tillåten lösning.

(ii) Giltig olikhet, ty om tre eller fyra av variablerna x_2, x_3, x_4, x_5 antar värdet 1 så fås i det andra villkoret att $VL \geq 4+3+4 = 11 \nleq 10$, varför $x_2+x_3+x_4+x_5 \leq 2$ måste gälla i varje tillåten lösning.

(iii) Giltig olikhet, ty $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leq 3$ implicerar att $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leq 4$ måste gälla i varje tillåten lösning.

7. a) Karush-Kuhn-Tucker-villkor:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}-3x_1^2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$y_1, y_2 \geq 0 \qquad (2)$$

$$x_1^2+x_2^2 \leq 2 \qquad (3)$$

$$-x_1^3-x_2 \leq 0 \qquad (4)$$

$$y_1(2-x_1^2-x_2^2) = 0 \qquad (5)$$

$$y_2(x_1^3+x_2) = 0 \qquad (6)$$

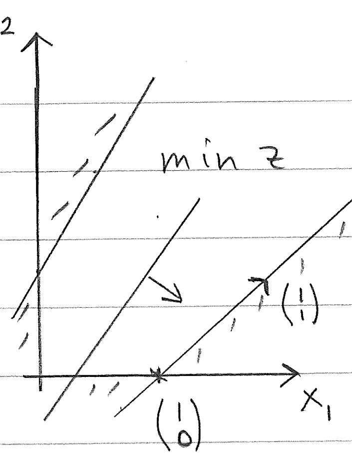
$\bar{x} = (1,-1)^T \Rightarrow$ (3), (4), (5), (6) uppfyllda

$\bar{x} = (1,-1)^T$ i (1) $\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}y_1 + \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}y_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1/4 \geq 0 \\ y_2 = 1/2 \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (2) uppfylld

$\bar{x} = (1,-1)^T$ är alltså en Karush-Kuhn-Tucker-punkt. Sant!

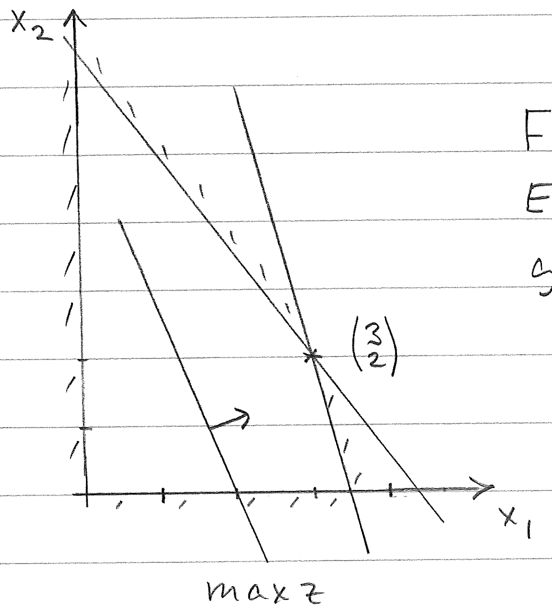
b)



Obegränsat optimum!

Låt tex $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $t \geq 0$.
Alla dessa punkter är tillåtna och $z = -3(1+t) + 2t =$
$= -3 - t \to -\infty$ då $t \to +\infty$.
Sant!

c)



För $c_1 = 11$ fås optimum $x^* = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
Eftersom optimum är unikt
gäller $v'(11) = x_1^* = 3$. Falskt!