Tentamen i TAOP07 Opt grk Y den 28/8-18: kortfattade lösningar.

1. Variabler:

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{om fordon } j \text{ laddas vid station } i \text{ under tidsperiod } t, \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,\ t=T_j^t,\dots,T_j^s$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om fordon } j \text{ laddas vid station } i, \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$$

Modell:
$$\min \sum_{t=1}^{T} p_t \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ijt}$$

$$\text{då } \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = 1, \quad j=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} \leq 1, \quad i=1,\dots,m,\ t=1,\dots,T$$

$$\sum_{t=T_j^t}^{T_j^s} x_{ijt} = d_j y_{ij}, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$$

$$x_{ijt} = 0/1, \ \forall i,j,t$$

$$y_{ij} = 0/1, \ \forall i,j$$

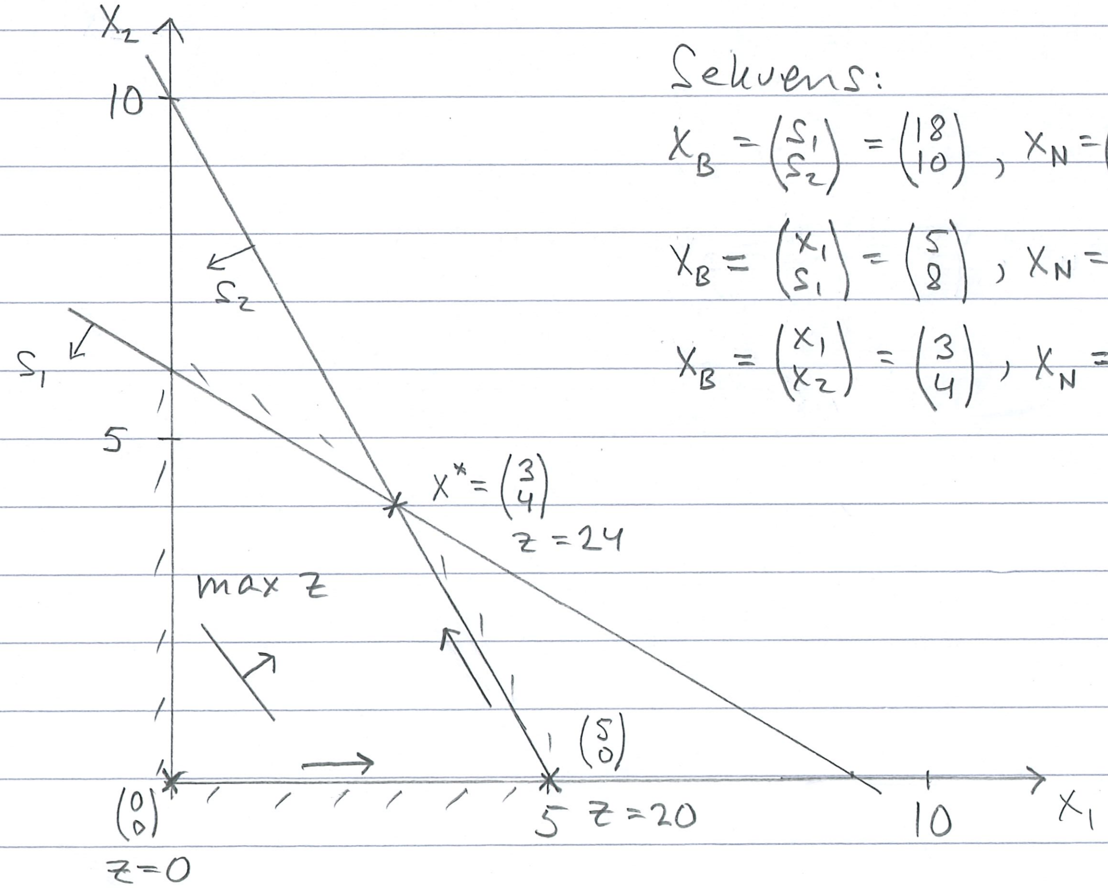
Villkoren säkerställer att:
- varje fordon laddas på en station
- varje station laddar högst ett fordon i taget
- varje fordon laddas i rätt antal tidsperioder och från den valda stationen

(Det finns alternativa korrekta modeller.)

2. a) Inför slackvariabler $s_1 \geq 0$ och $s_2 \geq 0$.

bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	värde	
$-z$	1	4	3	0	0	0	x_1 in
s_1	0	2	3	1	0	18	s_2 ut
s_2	0	2	1	0	1	10	
$-z$	1	0	1	0	-2	-20	x_2 in
s_1	0	0	2	1	-1	8	s_1 ut
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5	
$-z$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-24	optimum
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	

Optimum: $x_1^* = 3$ och $x_2^* = 4 \Rightarrow z^* = 24$



Sekvens:

$x_B = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\10\end{pmatrix}, \; x_N = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$x_B = \begin{pmatrix}x_1\\s_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}, \; x_N = \begin{pmatrix}x_2\\s_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

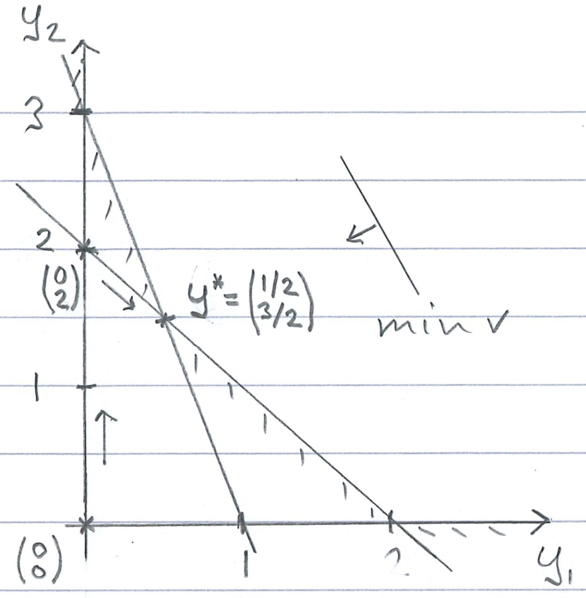
$x_B = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \; x_N = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

b) $\min v = 18y_1 + 10y_2$

då $2y_1 + 2y_2 \geq 4 \quad | \; x_1$

$3y_1 + y_2 \geq 3 \quad | \; x_2$

$y_1, \; y_2 \geq 0$



Komplementvillkor:

$y_1(18 - 2x_1 - 3x_2) = 0 \qquad (1)$

$y_2(10 - 2x_1 - x_2) = 0 \qquad (2)$

$x_1(2y_1 + 2y_2 - 4) = 0 \qquad (3)$

$x_2(3y_1 + y_2 - 3) = 0 \qquad (4)$

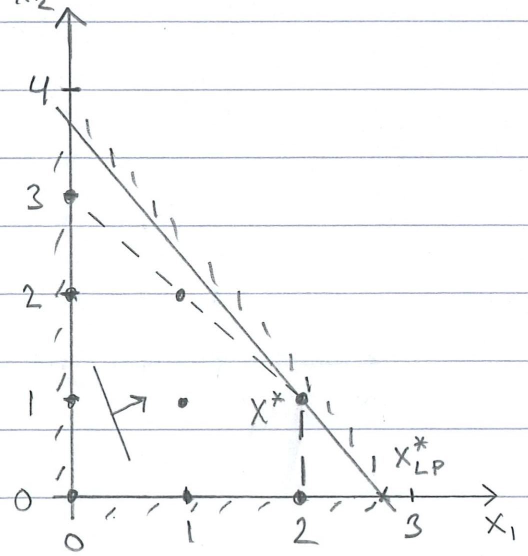
$x_1 = 0$ och $x_2 = 0 \underset{(1),(2)}{\Rightarrow} y_1 = 0$ och $y_2 = 0$

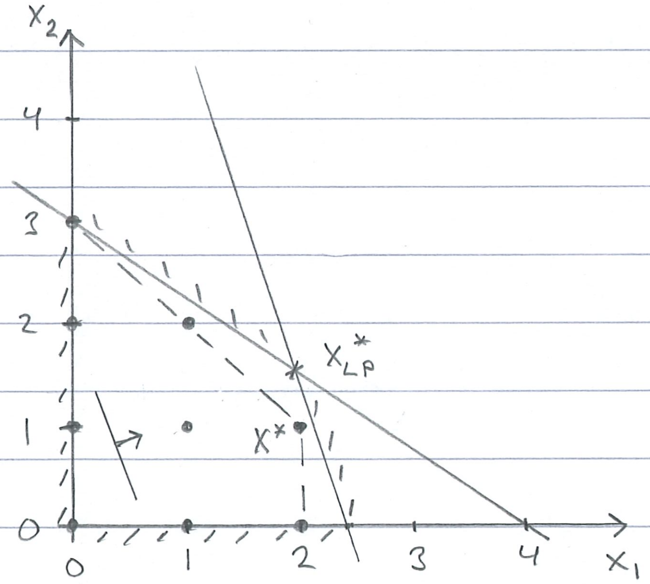
$x_1 = 5$ och $x_2 = 0 \underset{(1),(3)}{\Rightarrow} y_1 = 0$ och $y_2 = 2$

$x_1^* = 3$ och $x_2^* = 4 \underset{(3),(4)}{\Rightarrow} y_1^* = \frac{1}{2}$ och $y_2^* = \frac{3}{2}$

c) Alternativa optima fås då $\bar{c}_{ny} = c_{ny} - y^{*T} A_{ny} =$
$= c_{ny} - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})\binom{5}{3} = c_{ny} - 7 = 0 \Leftrightarrow c_{ny} = 7.$

3. a)





Problemen har samma tillåtna lösningar och samma optimum $x^* = (2,1)^T$ med $z^* = 7$. Konvexa höljet beskrivs av villkoren $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 \leq 2$, $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

b) Första modellen: $x^*_{LP} = (\frac{11}{4}, 0)^T \Rightarrow z^*_{LP} = 8\frac{1}{4}$

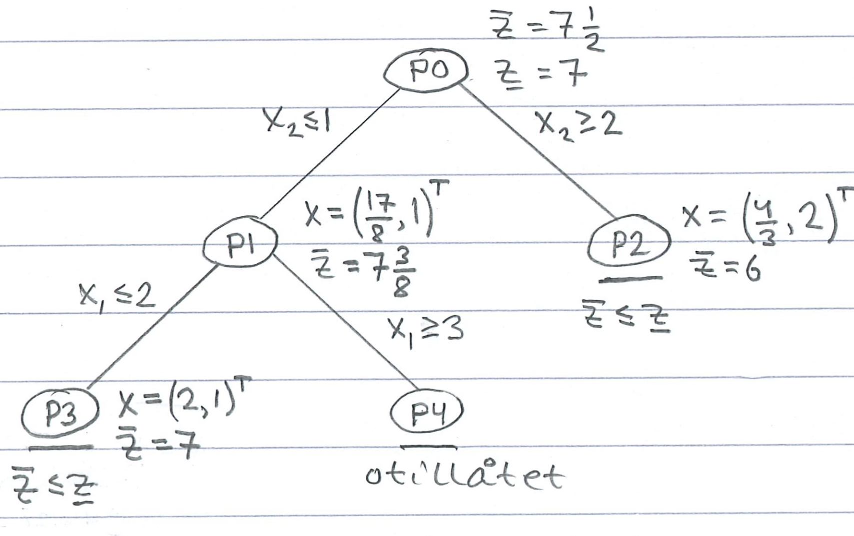
Andra modellen: $x^*_{LP} = (2, \frac{3}{2})^T \Rightarrow z^*_{LP} = 7\frac{1}{2}$

Den andra formuleringen av problemet ger den starkaste (lägsta) optimistiska uppskattningen av z^*.

c) $\bar{x} = (2,1)^T$ tillåten $\Rightarrow z^* \geq \underline{z} = 7$

Om man utnyttjar att z^* måste vara ett heltal så fås att $z^* \leq \bar{z} = \lfloor 7\frac{1}{2} \rfloor = 7$, varav det direkt följer att $\bar{x}$ är optimal.

Om man inte utnyttjar att z^* måste vara ett heltal så fås trädet nedan.

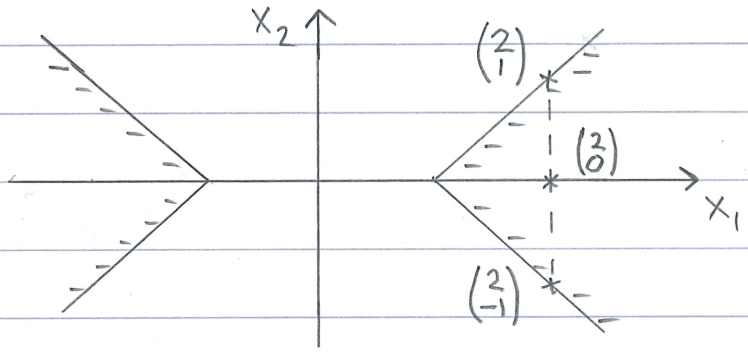


Eftersom ingen bättre heltalslösning hittas så är $\bar{x}$ optimal.

4. a) Ej konvex ty exempelvis gäller att

$\binom{2}{1}$ och $\binom{2}{-1}$ uppfyller villkoret $|x_1|-|x_2|\leq 1$ men

$\frac{1}{2}\binom{2}{1}+\frac{1}{2}\binom{2}{-1}=\binom{2}{0}$ inte gör det.



b)

$$|\nabla^2 f(x)-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda)-(-2)^2 =$$

$$= \lambda^2-6\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{5}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ för alla $x\in R^2 \Rightarrow f(x)$ konvex på R^2

c) $\{x\in R^n \mid Ax=b$ och $x\geq 0\}$ icke-tom och begränsad
$\Rightarrow v(c)$ är ett ändligt värde för varje $c\in R^n$.
Låt $c^1, c^2\in R^n$ och $\lambda\in[0,1]$. Då gäller att

$$v(\lambda c^1+(1-\lambda)c^2) = \max_{\substack{\text{då } Ax=b \\ x\geq 0}} \lambda c^{1T}x+(1-\lambda)c^{2T}x = \max_{\substack{\text{då } Ax=b \\ Ay=b \\ x,y\geq 0 \\ x=y}} \lambda c^{1T}x+(1-\lambda)c^{2T}y \underset{\substack{\text{relaxera} \\ x=y}}{\leq}$$

$$\leq \max_{\substack{\text{då } Ax=b \\ x\geq 0}} \lambda c^{1T}x + \max_{\substack{\text{då } Ay=b \\ y\geq 0}} (1-\lambda)c^{2T}y \underset{\substack{\lambda\geq 0 \\ 1-\lambda\geq 0}}{=} \lambda \max_{\substack{\text{då } Ax=b \\ x\geq 0}} c^{1T}x + (1-\lambda)\max_{\substack{\text{då } Ay=b \\ y\geq 0}} c^{2T}y =$$

$$= \lambda v(c^1)+(1-\lambda)v(c^2) \Rightarrow v \text{ konvex på } R^n.$$

5. min $f(x) = a(x_1-7)^2 + b(x_2-6)^2$

då $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ x_1 + 3x_2 \le 13 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{|l} y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \\ y_3 \ge 0 \\ y_4 \ge 0 \end{array}$

Karush-Kuhn-Tucker-villkor:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2a(x_1-7) \\ 2b(x_2-6) \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (1) \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 & (2) \\ x_1^2 + x_2^2 \le 25 & \\ x_1 + 3x_2 \le 13 & (3) \\ -x_1 \le 0 & \\ -x_2 \le 0 & \\ y_1(x_1^2 + x_2^2 - 25) = 0 & \\ y_2(x_1 + 3x_2 - 13) = 0 & (4) \\ y_3(-x_1) = 0 & \\ y_4(-x_2) = 0 & \end{cases}$$

För $\bar{x} = (4,3)^T$ fås:

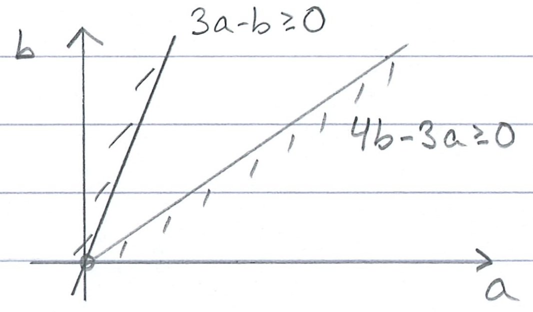
(3) är uppfyllda

(4) är uppfyllda omm $y_3 = y_4 = 0$

$$(1) \text{ och } y_3 = y_4 = 0 \iff \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} y_2 = \begin{pmatrix} 6a \\ 6b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{6}{18} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3a-b \\ -6a+8b \end{pmatrix}$$

Karush-Kuhn-Tucker-villkoren är då uppfyllda omm $y_1, y_2 \geq 0$ gäller, dvs omm a och b uppfyller att $3a-b \geq 0$ och $4b-3a \geq 0$.



6. $h(u) = 19u + \min (2-4u)x_1 + (4-7u)x_2 + (7-12u)x_3 + (9-15u)x_4 =$
då $x_1, x_2, x_3, x_4 = 0/1$

$$= 19u + \min_{x_1=0/1} (2-4u)x_1 + \min_{x_2=0/1} (4-7u)x_2 + \min_{x_3=0/1} (7-12u)x_3 + \min_{x_4=0/1} (9-15u)x_4 =$$

$$= \begin{cases} 19u & \text{då } u \leq \frac{1}{2} \\ 19u+2-4u = 2+15u & \text{då } \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{4}{7} \\ 19u+2-4u+4-7u = 6+8u & \text{då } \frac{4}{7} \leq u \leq \frac{7}{12} \\ 19u+2-4u+4-7u+7-12u = 13-4u & \text{då } \frac{7}{12} \leq u \leq \frac{9}{15} \\ 19u+2-4u+4-7u+7-12u+9-15u = 22-19u & \text{då } u \geq \frac{9}{15} \end{cases}$$

$\max_{u \geq 0} h(u)$ fås för $u^* = \frac{7}{12}$ med $h^* = 10\frac{2}{3}$

För alla $u \geq 0$ gäller att $h(u) \leq z^*$ och speciellt gäller att $h^* \leq z^*$. Alltså gäller att $z^* \geq 10\frac{2}{3}$.

7. a)

$$f(x) = x_1 x_2^2 \Rightarrow \nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} \underset{x_2 \neq 0}{\Longrightarrow}$$

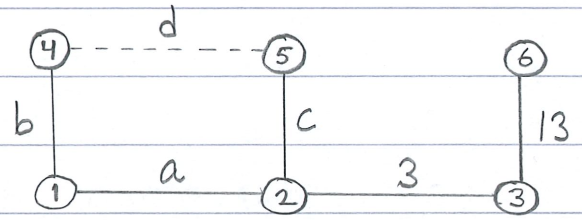
$$\Rightarrow \nabla^2 f(x)^{-1} = -\frac{1}{4x_2^2} \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ -2x_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_N = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x) =$$

$$= \frac{1}{4x_2^2}\begin{pmatrix}2x_1 & -2x_2\\ -2x_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2^2\\ 2x_1x_2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla f(x)^T d = -\frac{1}{2}(x_2^2,\ 2x_1x_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}x_1x_2^2 \begin{cases} <0 & \text{om } x_1>0 \\ >0 & \text{om } x_1<0 \end{cases}$$

Falskt!

b)

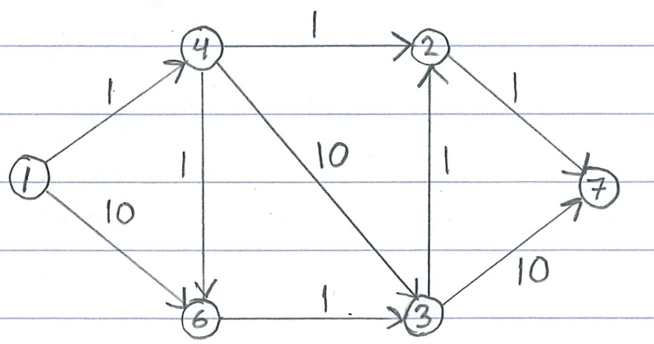


det givna billigaste uppspännande trädet och den studerade bågen

om $d<a$: byt (1,2) mot (4,5) → billigare träd
om $d<b$: byt (1,4) mot (4,5) → billigare träd
om $d<c$: byt (2,5) mot (4,5) → billigare träd

Eftersom trädet redan är billigast så måste alltså $d \geq a$, $d \geq b$ och $d \geq c$, dvs $d \geq \max\{a,b,c\}$ gälla. Sant!

c) Den givna vägen från nod 1 till nod 7 är billigast <u>endast</u> under förutsättning att en billigaste väg passerar nod 3. Annars behöver den <u>inte</u> vara billigast. Motexempel:



bv 1→3: (1,4), (4,6), (6,3)
bv 3→7: (3,2), (2,7)
bv 1→7: (1,4), (4,2), (2,7)

Falskt!