Tentamen i TAOP07 Opt grk Y den 11/6-19: kortfattade lösningar.

1. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1-y \\ x_1 + x_2 \leq 2-y \end{cases}$

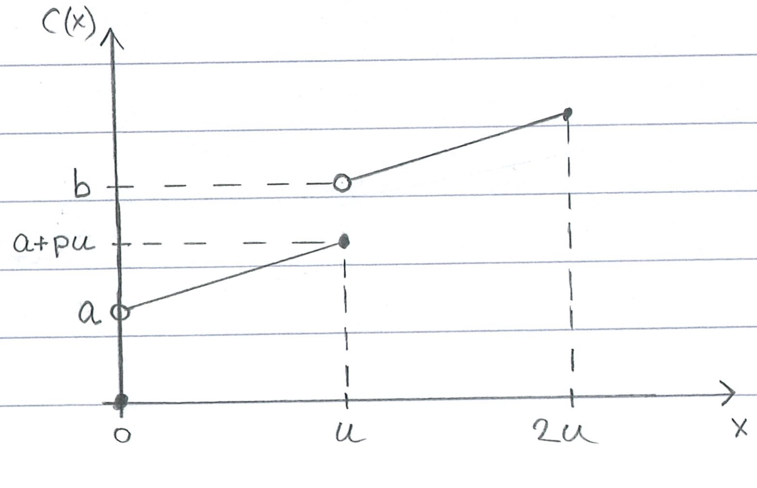
b) Om $x=0$ så är $(y_1,y_2)=(0,0)$, $(y_1,y_2)=(1,0)$ och $(y_1,y_2)=(0,1)$ tillåtet. Det korrekta värdet $C=0$ fås om $(y_1,y_2)=(0,0)$ är optimalt, vilket gäller om $a \geq 0$ och $b-pu \geq 0$

Om $0<x\leq u$ så är $(y_1,y_2)=(1,0)$ och $(y_1,y_2)=(0,1)$ tillåtet. Det korrekta värdet $C=a+px$ fås om $(y_1,y_2)=(1,0)$ är optimalt, vilket gäller om $a\leq b-pu$.

Om $u<x\leq 2u$ så är endast $(y_1,y_2)=(0,1)$ tillåtet, vilket ger det korrekta värdet $C=b+p(x-u)$.

Alltså: $a\geq 0$, $b-pu\geq 0$ och $a\leq b-pu$, vilket är ekvivalent med att $a\geq 0$ och $b\geq a+pu$.

Svar: $a\geq 0$ och $b\geq a+pu$

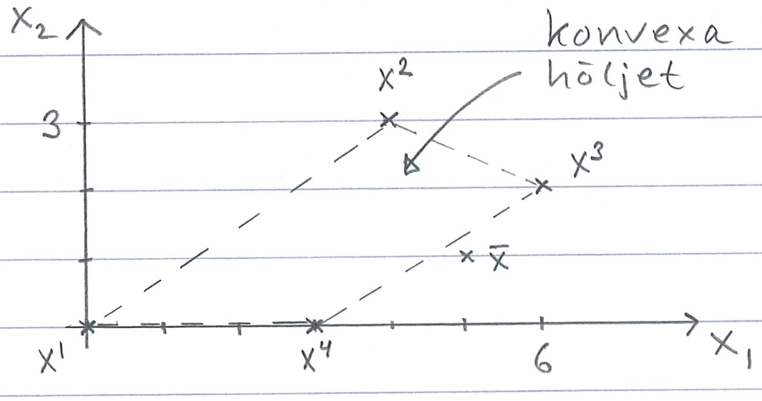


2. Uttryck först målfunktionen i icke-basvariabler.

$$w = a_1 + a_2 = 5 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3 - 3\lambda_4 + 1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 =$$
$$= 6 - 7\lambda_2 - 8\lambda_3 - 3\lambda_4$$

bas	$-w$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	a_1	a_2	värde	
$-w$	1	0	-7	-8	-3	0	0	-6	λ_3 in
a_1	0	0	4	6	3	1	0	5	a_2 ut
a_2	0	0	3	2	0	0	1	1	
λ_1	0	1	1	1	1	0	0	1	
$-w$	1	0	5	0	-3	0	4	-2	λ_4 in
a_1	0	0	-5	0	3	1	-3	2	λ_1 ut
λ_3	0	0	$3/2$	1	0	0	$1/2$	$1/2$	
λ_1	0	1	$-1/2$	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	
$-w$	1	3	$7/2$	0	0	0	$5/2$	$-1/2$	Optimum!
a_1	0	-3	$-7/2$	0	0	1	$-3/2$	$1/2$	
λ_3	0	0	$3/2$	1	0	0	$1/2$	$1/2$	
λ_4	0	1	$-1/2$	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	

$w^* = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \bar{x}$ ligger inte i det konvexa höljet.



$\bar{x}$ ligger inte i det konvexa höljet!

3. a) $v^* = \max\ v = 21y_1 + 14y_2$

$$\begin{array}{rl|l} \text{då} & 2y_1 + 5y_2 \le 58 & x_1 \\ & y_1 + 2y_2 \le 18 & x_2 \\ & 4y_1 + y_2 \le 44 & x_3 \\ & -y_1 + y_2 \le 9 & x_4 \\ & y_1,\ y_2 \ge 0 & \end{array}$$

b) Primalt problem med $x_2 = 3$:

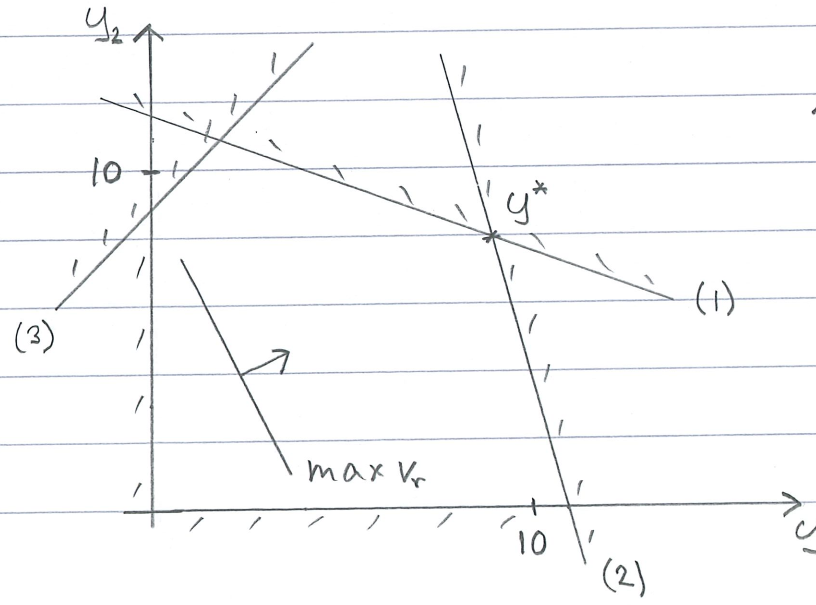
$z_r^* = \min\ z_r = 58x_1 + 44x_3 + 9x_4 + 54$

$$\begin{array}{rl|l} \text{då} & 2x_1 + 4x_3 - x_4 \ge 18 & y_1 \\ & 5x_1 + x_3 + x_4 \ge 8 & y_2 \\ & x_1,\ x_3,\ x_4 \ge 0 & \end{array}$$

Dualen till detta problem:

$v_r^* = \max\ v_r = 18y_1 + 8y_2 + 54$

$$\begin{array}{rl|ll} \text{då} & 2y_1 + 5y_2 \le 58 & x_1 & (1) \\ & 4y_1 + y_2 \le 44 & x_3 & (2) \\ & -y_1 + y_2 \le 9 & x_4 & (3) \\ & y_1,\ y_2 \ge 0 & & \end{array}$$



$$\begin{cases} 2y_1^* + 5y_2^* = 58 \\ 4y_1^* + y_2^* = 44 \end{cases}$$

$\Rightarrow y^* = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_r^* = 18 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + 54 = 280$

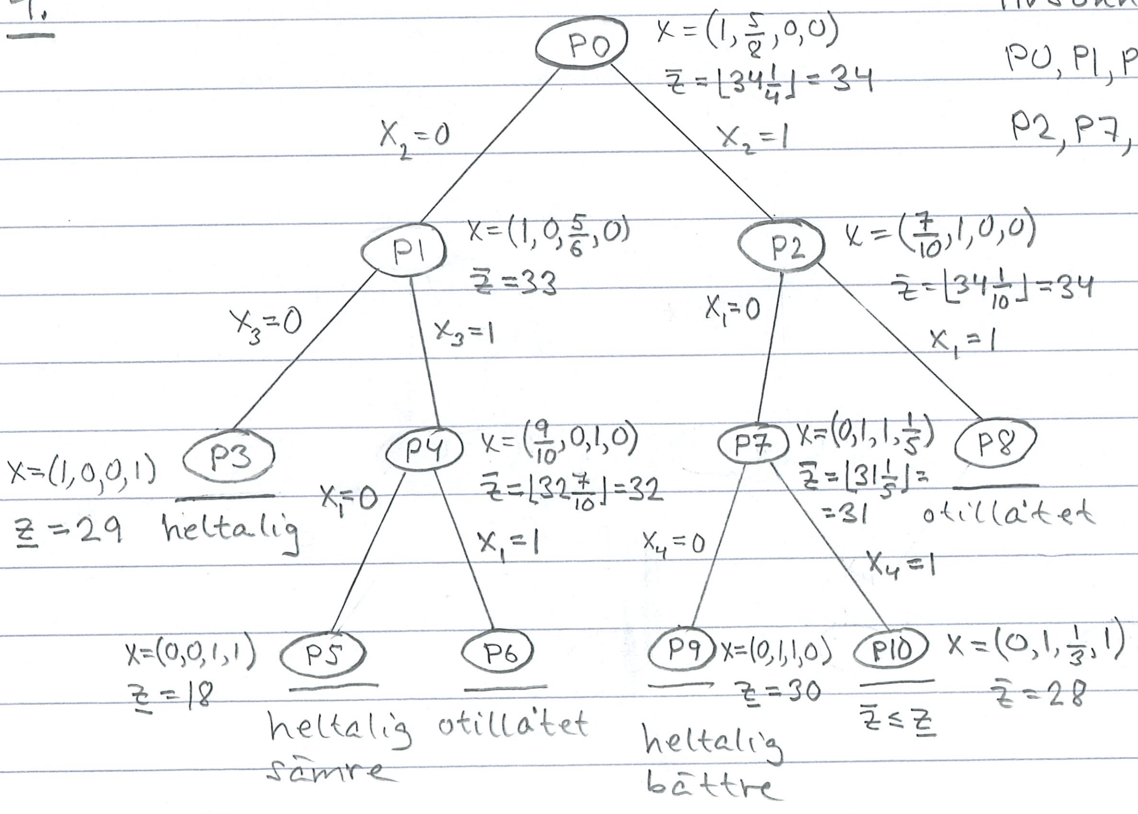
c) Stark LP-dualitet ger att $z_r^* = v_r^* = 280$.

Det modifierade problemet är en restriktion av det ursprungliga primala problemet (dvs det är mer begränsat än det ursprungliga). Det modifierade problemets optimala målfunktionsvärde ger därför en pessimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet för det ursprungliga primala problemet. Alltså gäller att $z^* \le z_r^* \Rightarrow z^* \le 280$.

[Kommentar: Om det ursprungliga primala problemet löses så fås $z^* = 266$. Vidare är $x_2^* = 5$, dvs valet $x_2 = 3$ är "icke-optimalt", varför $z_r^* > z^*$ fås.]

4.

Avsökningsordning:
P0, P1, P3, P4, P5, P6, P2, P7, P9, P10, P8



Optimum: $x^* = (0,1,1,0)$ med $z^* = 30$.

5. $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_1x_2 \\ 4x_2 - 2x_1^2 - 8 \end{pmatrix}$ och $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2-4x_2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow d^0_{BL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = x^0 + t d^0_{BL} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \ t \geq 0 \Rightarrow$

$\varphi(t) = f(x(t)) = 2t(t-4) \Rightarrow \varphi'(t) = 4t - 8 \begin{cases} <0 \text{ om } t<2 \\ >0 \text{ om } t>2 \end{cases}$

$\Rightarrow \min\limits_{t \geq 0} \varphi(t)$ fa's för $t = 2 \Rightarrow x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\nabla^2 f(x^0)^{-1} \nabla f(x^0) = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d^0_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vilket är samma riktning som i

deluppgift a $\Rightarrow x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\nabla f(x') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs x' är en stationär punkt

$\det(\nabla^2 f(x') - \lambda I) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -6 < 0$ och $\lambda_2 = 4 > 0$

Alltså är x' varken ett lokalt minimum eller ett lokalt maximum, utan en sadelpunkt.

6. a)

$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 1 =$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-7} = 3 \pm \sqrt{2} > 0, \ \forall x \in R^2$

$\Rightarrow f(x)$ är konvex på R^2

Bivillkoren är linjära och definierar därför ett konvext tillåtet område.

$\left.\begin{array}{l} \text{minimering} \\ f(x) \text{ konvex} \\ \text{konvext område} \end{array}\right\} \Rightarrow$ problemet är konvext

b) Lagrange-relaxation:

$$h(y) = \min_{x \in R^2} 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 9x_1 - x_2 + y_1(8 - 2x_1 - x_2) + y_2(11 - x_1 - 4x_2)$$

$$h(2,1) = \min_{x \in R^2} 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 9x_1 - x_2 + 2\cdot(8 - 2x_1 - x_2) + 1\cdot(11 - x_1 - 4x_2)$$

Detta är ett konvext problem utan bivillkor!

$$\nabla(2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 9x_1 - x_2 + 16 - 4x_1 - 2x_2 + 11 - x_1 - 4x_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 - 14 \\ x_1 + 2x_2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 14 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow x(2,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h(2,1) = 2\cdot 3^2 + 2^2 + 3\cdot 2 - 9\cdot 3 - 2 + 2(8 - 2\cdot 3 - 2) + 1\cdot(11 - 3 - 4\cdot 2) = -1$$

För alla $y \in R_+^2$ gäller att $h(y) \leq f^*$. Speciellt gäller då att $h(2,1) \leq f^*$, dvs att $f^* \geq -1$.

Undersök om $x(2,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ är tillåten i det givna olinjära optimeringsproblemet.

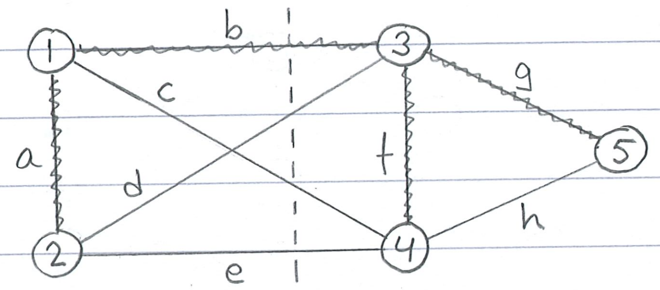
$$\left.\begin{aligned} 8 - 2x_1(2,1) - x_2(2,1) &= 8 - 2\cdot 3 - 2 = 0 \leq 0 \\ 11 - x_1(2,1) - 4x_2(2,1) &= 11 - 3 - 4\cdot 2 = 0 \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{tillåten!}$$

Alltså gäller att $f^* \leq f(x(2,1)) = f(3,2) = 2\cdot 3^2 + 2^2 + 3\cdot 2 - 9\cdot 3 - 2 = -1$.

$$\left.\begin{aligned} f^* &\geq -1 \\ f^* &\leq -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f^* = -1$$

Svar: $f^* = -1$ [och $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$].

7. a) Nätverket och det givna trädet:



Bågarna (1,3), (1,4), (2,3) och (2,4) går mellan nodmängderna {1,2} och {3,4,5}, och det är endast trädbågen (1,3) som kopplar ihop de två nodmängderna. Om någon av bågarna (1,4), (2,3) eller (2,4) vore billigare än bågen (1,3) så skulle båge (1,3) kunna bytas ut mot denna billigare båge. Detta skulle resultera i ett uppspännande träd som vore billigare än det givna, vilket skulle motsäga att det givna trädet är billigast. Alltså måste $c \geq b$, $d \geq b$ och $e \geq b$, dvs $\min\{c,d,e\} \geq b$, gälla. Sant!

b) KKT-villkor:

$$-\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + 2y_1 \begin{pmatrix} x_1/a^2 \\ x_2/b^2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

$$y_1\left(1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right) = 0 \quad (5)$$

$$y_2 x_1 = 0 \quad (6)$$

$$y_3 x_2 = 0 \quad (7)$$

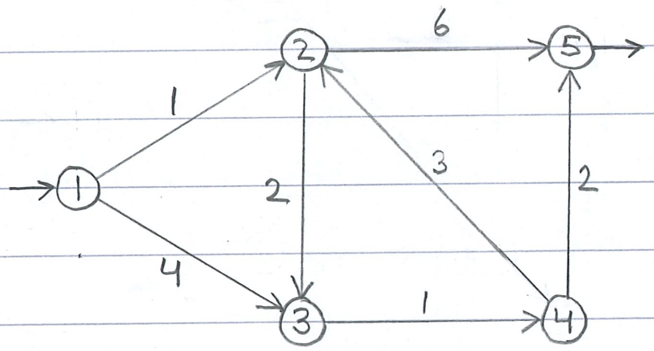
$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{a}{b}$ uppfyller (3), (4) och (5).

(6) och (7) uppfylls endast om $y_2 = y_3 = 0$.

(1) ger att $-\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{b}{a} + 2y_1\binom{1/a\sqrt{2}}{1/b\sqrt{2}} = \binom{0}{0} \Rightarrow y_1 = \frac{ab}{2} > 0$

Alltså är $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{a}{b}$ en KKT-punkt, med $y_1 = \frac{ab}{2}$ och $y_2 = y_3 = 0$. Sant!

c) Problemet är en 0/1-modell för problemet att finna en billigaste väg från nod 1 till nod 5 i det riktade nätverket



variabel	båge
x_1	(1,2)
x_2	(1,3)
x_3	(2,3)
x_4	(2,5)
x_5	(3,4)
x_6	(4,2)
x_7	(4,5)

Vidare är alla bågkostnader icke-negativa. Alltså kan det givna problemet lösas med Dijkstras algoritm. Sant!