Tentamen i TAOP07 Opt grk Y den 27/3-20: kortfattade lösningar

1. Variabler: a_1 och a_2 samt de två högerleden b_1 och b_2.

$$\max\ b_2 - b_1$$
$$\text{då } a_1\bar{x}_i + a_2\bar{y}_i \le b_1,\quad i\in I_1$$
$$a_1\bar{x}_i + a_2\bar{y}_i \ge b_2,\quad i\in I_2$$
$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_1,\ a_2 \ge 0$$

2. a) Multiplicera från vänster med bas-inversen $B^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \quad\quad - \frac{7}{2}x_4 - 4x_5 = 2 \\ -x_1 \quad\quad + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

b) Finn $\min\ z = x_1 + x_2 = x_1 + 2 - 2x_1 + \frac{7}{2}x_4 + 4x_5 =$
$= 2 - x_1 + \frac{7}{2}x_4 + 4x_5$ med simplexmetoden.

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	hl	
$-z$	1	-1	0	0	$\frac{7}{2}$	4	-2	x_1 in
x_2	0	2	1	0	$-\frac{7}{2}$	-4	2	x_2 ut
x_3	0	-1	0	1	3	3	3	
$-z$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	2	-1	optimum!
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{4}$	-2	1	
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	1	4	

$z^* = 1 > 0 \Rightarrow$ det finns ingen tillåten lösning med $x_1 = x_2 = 0$

3. a) $v(c) = \max\ y_1 + c y_2$

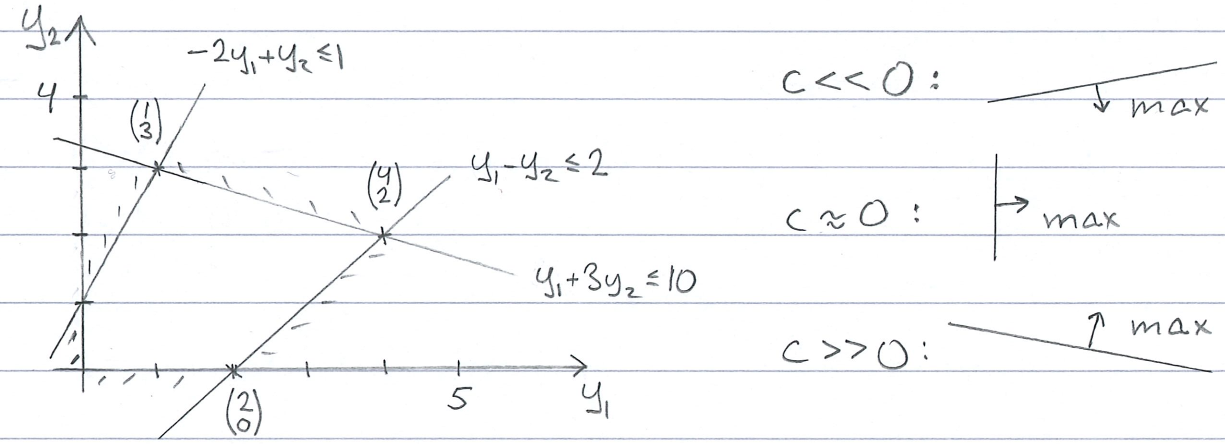
då $-2y_1 + y_2 \leq 1 \quad (1)$

$y_1 - y_2 \leq 2 \quad (2)$

$y_1 + 3y_2 \leq 10 \quad (3)$

$y_1, y_2 \geq 0$

b)

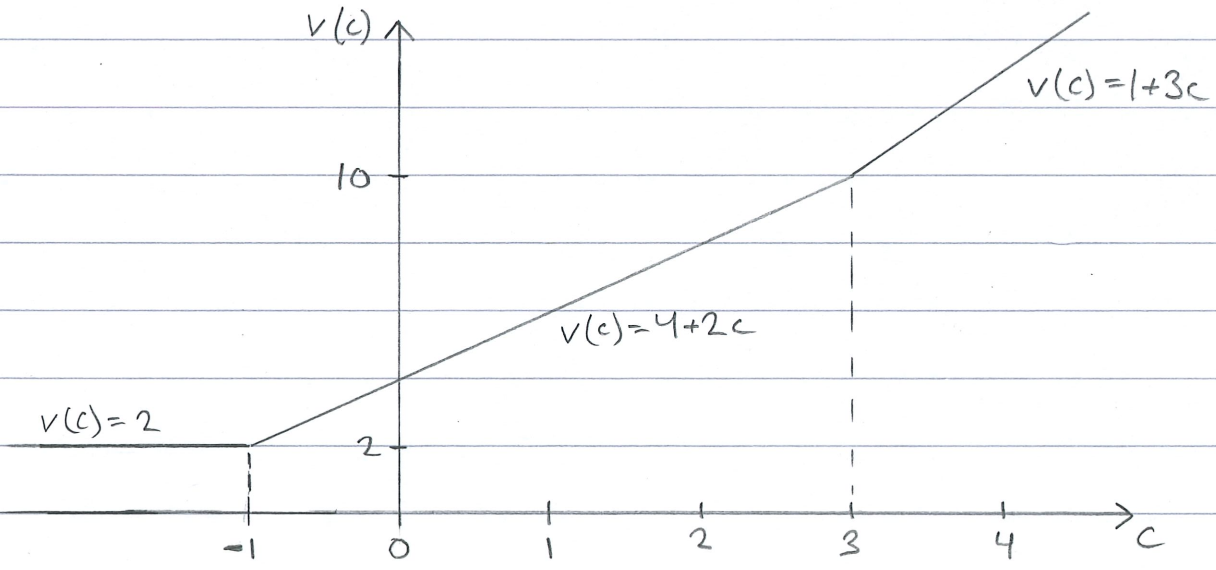


Fall: $c \leq -1 \Rightarrow \binom{2}{0}$ optimal $\Rightarrow v(c) = 2$

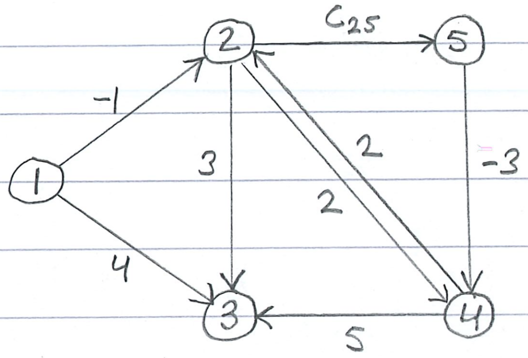
$-1 \leq c \leq 3 \Rightarrow \binom{4}{2}$ optimal $\Rightarrow v(c) = 4 + 2c$

$c \geq 3 \Rightarrow \binom{1}{3}$ optimal $\Rightarrow v(c) = 1 + 3c$

Alltså: $v(c) = \begin{cases} 2 & \text{om } c \leq -1 \\ 4+2c & \text{om } -1 \leq c \leq 3 \\ 1+3c & \text{om } c \geq 3 \end{cases}$



4. a)



Bellmans ekvationer:

$y_1 = 0$

$y_2 = \min\{y_1 - 1, y_4 + 2\}$

$y_3 = \min\{y_1 + 4, y_2 + 3, y_4 + 5\}$

$y_4 = \min\{y_2 + 2, y_5 - 3\}$

$y_5 = y_2 + c_{25}$

Låt $c_{25} = 2$ och verifiera att $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 2$, $y_4 = -2$ och $y_5 = 1$ uppfyller Bellmans ekvationer.

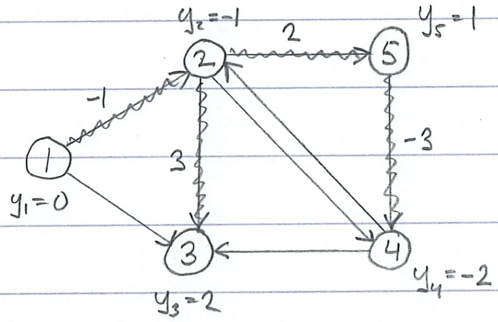
$y_1 = 0$ OK

$y_2 = \min\{0-1, -2+2\} = -1$ OK

$y_3 = \min\{0+4, -1+3, -2+5\} = 2$ OK

$y_4 = \min\{-1+2, 1-3\} = -2$ OK

$y_5 = -1+2 = 1$ OK



Billigaste-väg-bågar:
(1,2), (2,3), (5,4) och (2,5)

b) Billigaste-väg-trädet är oförändrat omm:

för nod 5: $y_5 = y_2 + c_{25} = -1 + c_{25}$

för nod 4: $y_4 = y_5 - 3 = -1 + c_{25} - 3 = -4 + c_{25}$

$y_5 - 3 \leq y_2 + 2 \iff -1 + c_{25} - 3 \leq -1 + 2 \iff c_{25} \leq 5$

för nod 3: $y_2 + 3 \leq y_4 + 5 \iff -1 + 3 \leq -4 + c_{25} + 5 \iff c_{25} \geq 1$

för nod 2: $y_1 - 1 \leq y_4 + 2 \iff 0 - 1 \leq -4 + c_{25} + 2 \iff c_{25} \geq 1$

Alltså: då $1 \leq c_{25} \leq 5$.

5. a) $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3) + 4x_1 + 3x_2 + x_3 \Rightarrow$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 4 \\ 2x_2 - x_3 + 3 \\ 3x_3 - x_2 + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-1] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \geq 0 \\ \lambda_2 = (5+\sqrt{5})/2 \geq 0 \\ \lambda_3 = (5-\sqrt{5})/2 \geq 0 \end{cases}$$

gäller för alla $x \in R^3 \Rightarrow$
$f(x)$ är konvex på R^3

Bivillkoren är linjära och definierar därför ett konvext område.

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimering} \\ \text{konvex målfunktion} \\ \text{konvext område} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{konvext problem}$$

b) Låt $g_1(x) = 4 - 2x_1 - x_2 - x_3$ och $g_2(x) = 4 - x_1 - 2x_2 - x_3$.
KKT-villkor:

$$\begin{cases} \nabla f(x) + y_1 \nabla g_1(x) + y_2 \nabla g_2(x) = 0 & (1) \\ y_1, y_2 \geq 0 & (2) \\ g_1(x) \leq 0 & (3) \\ g_2(x) \leq 0 & (4) \\ y_1 g_1(x) = 0 & (5) \\ y_2 g_2(x) = 0 & (6) \end{cases}$$

För $\bar{x} = (1,1,1)^T$ fås:

$g_1(\bar{x}) = 0 \Rightarrow$ (3) och (5) uppfyllda

$g_2(\bar{x}) = 0 \Rightarrow$ (4) och (6) uppfyllda

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som har lösningen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vilken uppfyller (2).

Ja, $\bar{x} = (1,1,1)^T$ är en KKT-punkt.

6. a) $x(\bar{u}) \in X$ och $g_i(x(\bar{u})) = b_i$, $i = 1, \ldots, m \Rightarrow x(\bar{u})$ är tillåten i det modifierade problemet $\Rightarrow f^* \leq f(x(\bar{u}))$

Betrakta en Lagrange-relaxation av det modifierade problemet med multiplikatorer $\bar{u}_i$, $i = 1, \ldots, m$.

$$h(\bar{u}) = \min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i (g_i(x) - b_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i b_i + \min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i b_i + f(x(\bar{u})) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x(\bar{u}))$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i b_i + f(x(\bar{u})) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i b_i = f(x(\bar{u}))$$

Svag dualitet $\Rightarrow f^* \geq h(\bar{u}) = f(x(\bar{u}))$

Alltså gäller att $f(x(\bar{u})) = f^*$. Eftersom $x(\bar{u})$ är tillåten så följer att $x(\bar{u})$ är optimal.

b) $\min_{x\in\{0,1\}^4} -4x_1-9x_2-7x_3-3x_4+1\cdot(2x_1+2x_2+x_3+2x_4)+2\cdot(2x_1+3x_2+2x_3+x_4)=$

$= \min_{x\in\{0,1\}^4} 2x_1-x_2-2x_3+x_4 \Rightarrow x(\bar{u})=(0,1,1,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = g_1(x(\bar{u})) = 0+2+1+0 = 3 \\ b_2 = g_2(x(\bar{u})) = 0+3+2+0 = 5 \end{cases}$$

7. a) Newton-riktningen ges av $d_N = -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1}\nabla f(\bar{x})$.

$f(x) = (x_1-2)^4 + (x_1-2)^2 x_2^2 + (x_2+1)^2$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4(x_1-2)^3+2(x_1-2)x_2^2 \\ 2(x_1-2)^2x_2+2(x_2+1) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12(x_1-2)^2+2x_2^2 & 4(x_1-2)x_2 \\ 4(x_1-2)x_2 & 2(x_1-2)^2+2 \end{pmatrix}$$

$$d_N = -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1}\nabla f(\bar{x}) = -\begin{pmatrix} 12+2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -4-2 \\ 2+2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{12}{40}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \,//\, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Sant!

b) Om $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ gäller så fås det mindre systemet

$$\begin{cases} 6x_2+5x_4+4x_6 = 12 \\ x_2,\ x_4,\ x_6 = 0/1, \end{cases}$$

vilket saknar lösning. Alltså måste $x_1+x_3+x_5 \geq 1$ gälla för varje tillåten lösning till det givna systemet.

Om $x_2 = x_4 = x_6 = 1$ gäller så fås det mindre systemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_5 = -3 \\ x_1,\ x_3,\ x_5 = 0/1 \end{cases}$$

vilket saknar lösning. Alltså måste $x_2 + x_4 + x_6 \leq 2$ gälla för varje tillåten lösning till det givna systemet.

Båda villkoren är alltså giltiga olikheter. Sant!

c) $\left.\begin{array}{l} -x_1 x_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 > 0$ och $x_2 > 0$

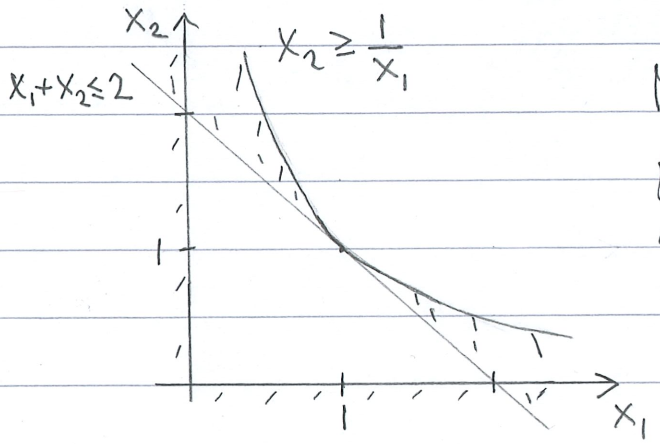
Om $x_1 > 0$ så gäller att $-x_1 x_2 \leq -1 \Leftrightarrow -x_2 \leq -\frac{1}{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} - x_2 \leq 0$.

Funktionen $\frac{1}{x_1} - x_2$ är konvex då $x_1 > 0 \Rightarrow$ villkoret $\frac{1}{x_1} - x_2 \leq 0$ definierar en konvex mängd då $x_1 > 0$.

Villkoren $x_1 + x_2 \leq 2$ och $x_1, x_2 \geq 0$ är linjära och definierar därför konvexa mängder.

Skärningen av konvexa mängder är konvex. Alltså är den givna mängden konvex. Falskt!

Alternativ, och mycket kortare lösning, mha en figur:



Mängden består endast av punkten $x_1 = x_2 = 1$, varför den är konvex.