Tentamen i TAOP07 Opt grk Y den 9/6-20: kortfattade lösningar

<u>1.</u> a) $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=pV$

b) $2x_1+2x_2+3x_3 \le 0{,}9y_1$

$2x_1+3x_2+4x_3 \le 0{,}9y_2$

<u>2.</u> Finn minimum och maximum av $z=8x_1-5x_2+10x_3$. Uttryck z i den givna startbasen.

$$z=8x_1-5x_2+10x_3=8(9-2x_3-x_4-x_5)-5(4-x_3-x_4-2x_5)+10x_3=$$
$$=52-x_3-3x_4+2x_5$$

Minimering:

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde	
$-z$	1	0	0	-1	-3	2	-52	x_4 in
x_1	0	1	0	2	1	1	9	x_2 ut
x_2	0	0	1	1	1	2	4	
$-z$	1	0	3	2	0	8	-40	
x_1	0	1	-1	1	0	-1	5	
x_4	0	0	1	1	1	2	4	

Optimum! Alltså gäller $z \ge 40$ för alla tillåtna värden på $x_1,\dots,x_5$.

Maximering:

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde
$-z$	1	0	0	-1	-3	2	-52
x_1	0	1	0	2	1	1	9
x_2	0	0	1	1	1	2	4

x_5 in
x_2 ut

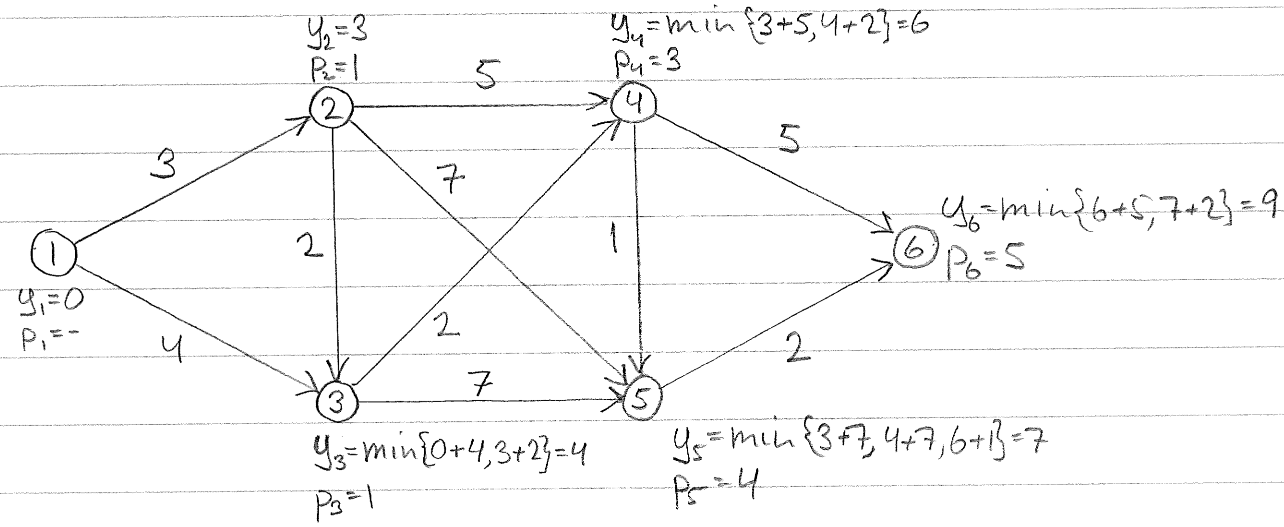
bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde
$-z$	1	0	-1	-2	-4	0	-56
x_1	0	1	$-1/2$	$3/2$	$1/2$	0	7
x_5	0	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	2

Optimum! Alltså gäller $z \leq 56$ för alla tillåtna värden på $x_1, \ldots, x_5$.

Svar: $l = 40$ och $u = 56$

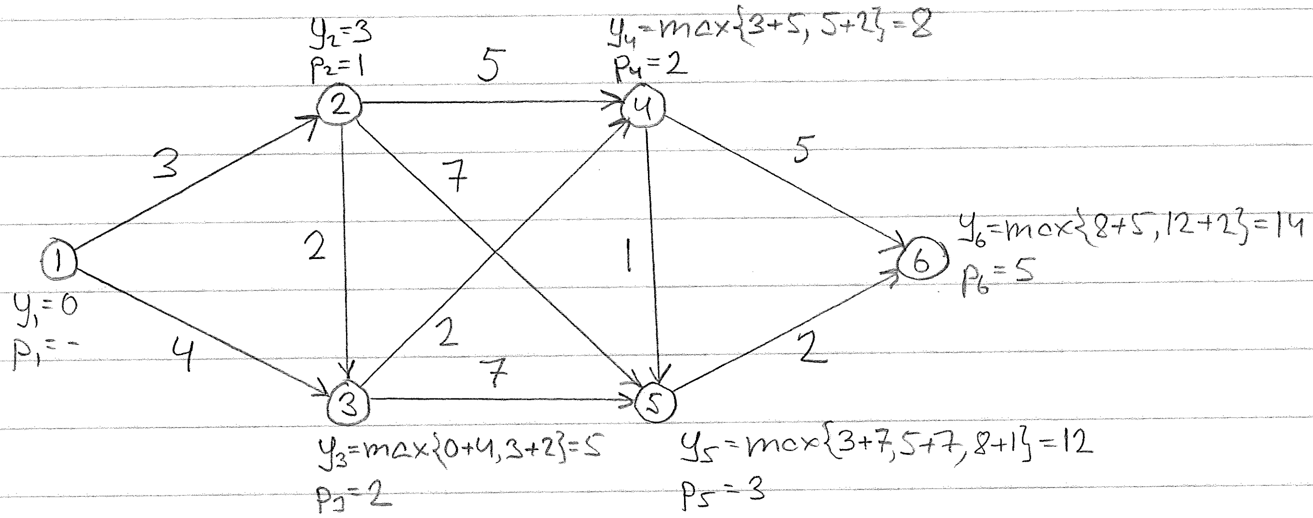
3. Alla bågar går från noder med lägre nodnummer till noder med högre nodnummer. Alltså är noderna numrerade i topologisk ordning och Bellmans ekvationer löses genom att noderna avsöks i nummerordning.

a)



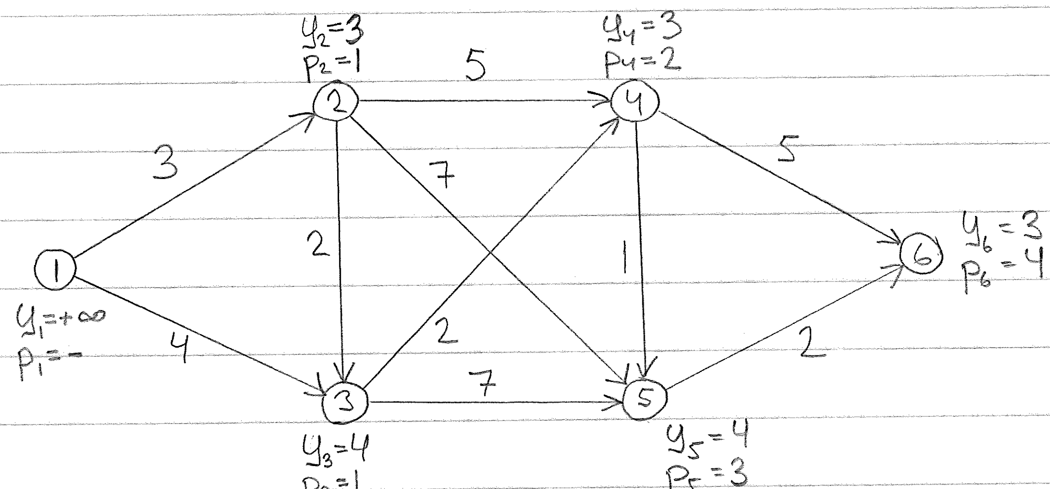
Uppnystning ger bv 1-3-4-5-6, med kostnad 9.

b)



Uppnystning ger dyraste väg 1-2-3-5-6 med kostnad 14.

c)



Beräkningar av nodpriser och föregångare:

$y_1=+\infty$, $p_1=-$

$y_2=\min\{+\infty,3\}=3$, $p_2=1$

$y_3=\max\{\min\{+\infty,4\}, \min\{3,2\}\}=4$, $p_3=1$

$y_4=\max\{\min\{3,5\}, \min\{4,2\}\}=3$, $p_4=2$

$y_5=\max\{\min\{3,7\}, \min\{4,7\}, \min\{3,1\}\}=4$, $p_5=3$

$y_6=\max\{\min\{3,5\}, \min\{4,2\}\}=3$, $p_6=4$

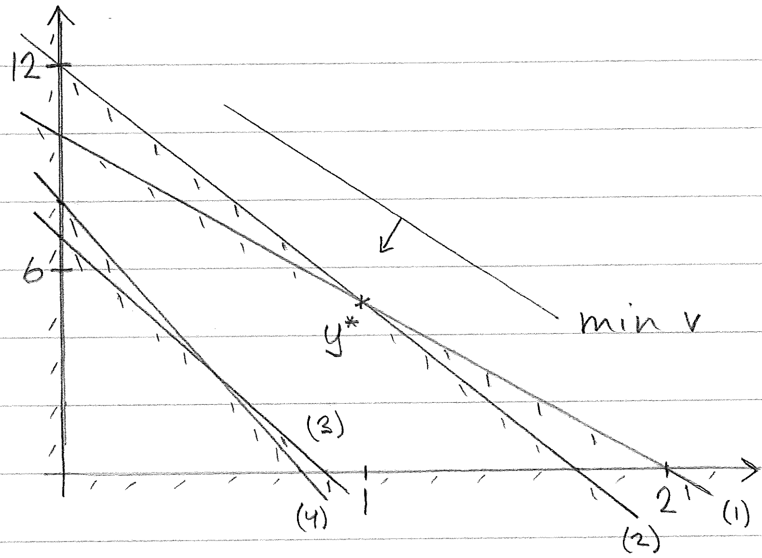
Uppnystning ger väg av maximal kapacitet 1-2-4-6 med kapacitet 3.

4. a) $\max\left\{\frac{10}{5}, \frac{12}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{10}\right\} = \frac{10}{5} \Rightarrow x^*_{LP} = \left(\frac{23}{5}, 0, 0, 0\right)$ med $z^*_{LP} = 46.$

LP är en relaxation $\Rightarrow z^*_{LP} \geq z^* \Rightarrow z^* \leq 46.$

b) Dual till LP-relaxationen:

$$\begin{aligned} \min\ & v = 23y_1 + 4y_2 \\ \text{då}\ & 5y_1 + y_2 \geq 10 \quad (1) \\ & 7y_1 + y_2 \geq 12 \quad (2) \\ & 8y_1 + y_2 \geq 7 \quad (3) \\ & 10y_1 + y_2 \geq 8 \quad (4) \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Optimum för likhet i (1) och (2) $\Rightarrow \begin{cases} 5y_1^* + y_2 = 10 \\ 7y_1^* + y_2 = 12 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 1 \\ y_2^* = 5 \end{cases} \Rightarrow v^* = 43$

Stark LP-dualitet $\Rightarrow z^*_{LP} = 43.$ LP är en relaxation $\Rightarrow z^*_{LP} \geq z^* \Rightarrow z^* \leq 43.$

5. a) Skriv problemet som

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{då}\ & x_j \leq u_j,\ j = 1, \ldots, n \quad \Big| \quad y_j \geq 0 \\ & -x_j \leq -l_j,\ j = 1, \ldots, n \quad \Big| \quad v_j \geq 0 \end{aligned}$$

där y_j och v_j är Lagrange-multiplikatorer för respektive villkor.

Karush-Kuhn-Tucker-villkor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} + y_j - v_j = 0, \quad j=1,\dots,n & (1) \\ y_j, v_j \geq 0, \quad j=1,\dots,n & (2),(3) \\ y_j(u_j - x_j) = 0, \quad j=1,\dots,n & (4) \\ v_j(x_j - l_j) = 0, \quad j=1,\dots,n & (5) \\ x_j \leq u_j, \quad j=1,\dots,n & (6) \\ -x_j \leq -l_j, \quad j=1,\dots,n & (7) \end{cases}$$

b) (6) och (7) $\Leftrightarrow$ x tillåten

om $x_j = l_j$: (5) uppfyllt
(4) uppfyllt omm $y_j = 0$ (ty $u_j > l_j$)
$\Rightarrow$ (2) uppfyllt
(1) och (3) uppfyllda omm $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0$

om $l_j < x_j < u_j$: (4) och (5) uppfyllda omm $y_j = v_j = 0$
$\Rightarrow$ (2) och (3) uppfyllda
(1) uppfyllt omm $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0$

om $x_j = u_j$: (4) uppfyllt
(5) uppfyllt omm $v_j = 0$ (ty $l_j < u_j$)
$\Rightarrow$ (3) uppfyllt
(1) och (2) uppfyllda omm $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} \leq 0$

Alltså: $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} \begin{cases} \geq 0 & \text{om } x_j = l_j \\ = 0 & \text{om } l_j < x_j < u_j \\ \leq 0 & \text{om } x_j = u_j \end{cases}$ för $j = 1,\dots,n$.

6. a) Undersök målfunktionen $f(x) = \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2)$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 7\lambda + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} > 0, \ \forall x \in R^2 \Rightarrow f(x) \text{ konvex på hela } R^2$$

Bivillkoren är linjära, varför de definierar ett konvext tillåtet område.

minimering
konvex målfunktionen
konvext tillåtet område
$\Bigg\} \Rightarrow$ konvext problem

b) Låt $h(y) = \min\limits_{x \in R^2} \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2) + y_1(14 - x_1 - 4x_2) + y_2(6 - x_1 - x_2)$.

$$h(3,6) = \min_{x \in R^2} \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2) + 3(14 - x_1 - 4x_2) + 6(6 - x_1 - x_2)$$

Konvext obegränsat problem $\Rightarrow$ första ordningens optimalitetsvillkor ger globalt minimum.

$$\nabla\left\{\frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2) + 3(14 - x_1 - 4x_2) + 6(6 - x_1 - x_2)\right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 - 6 \\ x_1 + 5x_2 - 12 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 5x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(3,6) = 3 \\ x_2(3,6) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(3,6) = \frac{1}{2}(2\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 5\cdot 3^2) + 3(14 - 3 - 4\cdot 3) + 6(6 - 3 - 3) = \frac{75}{2}$$

$$h(y) \le f^*, \ \forall y \in R_+^2 \Rightarrow f^* \ge \frac{75}{2}$$

Är $x(3,6)$ tillåten i ursprungliga problemet?

$14 - x_1(3,6) - 4x_2(3,6) = 14 - 3 - 4\cdot 3 = -1 \leq 0$
$6 - x_1(3,6) - x_2(3,6) = 6 - 3 - 3 = 0 \leq 0$

Ja! Alltså gäller att $f^* \leq f(x(3,6)) = \frac{1}{2}(2\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 5\cdot 3^2) = \frac{81}{2}$.

Svar: $\frac{75}{2} \leq f^* \leq \frac{81}{2}$

7. a) Låt $x(t) = \bar{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$ $\quad t \geq 0$.

$\varphi(t) = (t-2)^4 + (t-2)^4 - (t-2)^2 - (t-2)^2 + t - t = 2(t-2)^4 - 2(t-2)^2$
$\varphi'(t) = 8(t-2)^3 - 4(t-2) \Rightarrow \varphi'(2) = 0 \Rightarrow$ stationär punkt.
$\varphi''(t) = 24(t-2)^2 - 4 \Rightarrow \varphi''(2) = -4 \Rightarrow$ lokalt <u>maximum</u>!
Falskt!

b) x^* och x^{**} optimala $\Rightarrow x^*, x^{**} \in X$ och $f(x^*) = f(x^{**}) \leq f(x)$, $\forall x \in X$
X konvex $\Rightarrow \lambda x^* + (1-\lambda)x^{**} \in X \Rightarrow f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^*) \geq f(x^*)$
$f(x)$ konvex $\Rightarrow f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^*) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x^{**}) = f(x^*)$
Alltså gäller att $f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}) = f(x^*) \Rightarrow \lambda x^* + (1-\lambda)x^*$ är också optimal. Sant!

c) Låt $b_1 = 9$. Då är $(7,2)^T$ tillåten. Tag fram en komplementär duallösning.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Dual:} & \max & 9y_1 + 10y_2 + 11y_3 & \\
& \text{då} & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 7 & \vert\ x_1 \\
& & y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 5 & \vert\ x_2 \\
& & y_1, y_2, y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Komplementvillkor:

$$y_1(x_1+x_2-9)=0 \qquad (1)$$
$$y_2(2x_1+x_2-10)=0 \qquad (2)$$
$$y_3(x_1+2x_2-11)=0 \qquad (3)$$
$$x_1(7-y_1-2y_2-y_3)=0 \qquad (4)$$
$$x_2(5-y_1-y_2-2y_3)=0 \qquad (5)$$

För $(x_1,x_2)=(7,2)$ fås:

(1) och (3) ger inget

$$\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow y_2=0 \\ (4) \Rightarrow y_1+2y_2+y_3=7 \\ (5) \Rightarrow y_1+y_2+2y_3=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1=9 \\ y_2=0 \\ y_3=-2 \end{cases}$$

$y_3=-2 \not\geq 0 \Rightarrow$ den komplementära duallösningen är otillåten $\Rightarrow (7,2)^T$ är <u>inte</u> optimal. Falskt!