Tentamen TAOP07 Opt grk Y den 26/3-21: kortfattade lösningar.

1. a) x_j = antal tillverkade enheter av produkt j, $j = 1, 2, 3, 4$

y_1 = antal flyttade timmar $A \to C$

y_2 = antal flyttade timmar $B \to C$

$$\max z = 17x_1 + 22x_2 + 9x_3 + 18x_4$$

$$\text{då} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 160 - y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 200 - y_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 180 + y_1 + y_2 \\ x_1 \leq 50 \quad (1) \\ x_2 \leq 60 \\ x_3 \leq 85 \\ x_4 \leq 70 \quad (2) \\ y_1 \leq 0{,}20 \cdot 160 \\ y_2 \leq 0{,}30 \cdot 200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) x_{11} = antal enheter av produkt 1 som säljs som produkt 1

x_{14} = antal enheter av produkt 1 som säljs istället för produkt 4

Finn $\max z = 17x_{11} + 16x_{14} + 22x_2 + 9x_3 + 18x_4$

(1) ändras till $x_{11} \leq 50$

(2) ändras till $x_4 + x_{14} \leq 70$

tillkommer: $x_1 = x_{11} + x_{14}$ och $x_{11}, x_{14} \geq 0$

2) Inför slackvariabler $s_1, s_2 \geq 0$ och artificiella variabler $a_1, a_2 \geq 0$.

Fas-I: $\min w = a_1 + a_2$

$$
\begin{aligned}
\text{då } x_1 + x_2 - s_1 \quad + a_1 \quad &= 1 \\
2x_1 - x_2 \quad + a_2 &= 1 \\
x_2 \quad + s_2 \quad &= 2 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$w = a_1 + a_2 = 1 - x_1 - x_2 + s_1 + 1 - 2x_1 + x_2 = 2 - 3x_1 + s_1$$

Två simplexiterationer med x_1 som inkommande och a_2 som utgående respektive x_2 som inkommande och a_1 som utgående ger optimaltablån

bas	$-w$	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	värde
$-w$	1					1	1	0
x_2			1	$-2/3$		$2/3$	$-1/3$	$1/3$
x_1		1		$-1/3$		$1/3$	$1/3$	$2/3$
s_2				$2/3$	1	$-2/3$	$1/3$	$5/3$

Optimum med $w^* = 0 \Rightarrow$ tillåten lösning funnen! Stryk a_1 och a_2 och uttryck z i den tillåtna basen!

$$z = 4x_1 + x_2 = 4\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s_1\right) + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s_1 = 3 + \underbrace{2s_1}_{\geq 0}$$

Optimum! Alltså: $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ med $z^* = 3$.

3) Dual: $\min v = 24y_1 + 17y_2 + 29y_3$

$$\text{då} \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 7 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 8 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Komplementvillkor:

$$x_1(3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 7) = 0 \underset{x_1 > 0}{\Rightarrow} 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 7 \quad (i)$$
$$x_2(4y_1 + 3y_2 + y_3 - 10) = 0 \underset{x_2 > 0}{\Rightarrow} 4y_1 + 3y_2 + y_3 = 10 \quad (ii)$$
$$x_3(y_1 + y_2 + 2y_3 - 3) = 0$$
$$x_4(2y_1 + 4y_2 + 5y_3 - 8) = 0 \quad (iv)$$

$$y_1(24 - 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4) = 0 \quad (v)$$
$$y_2(17 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4) = 0 \quad (vi)$$
$$y_3(29 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4) = 0 \underset{(\dots) > 0}{\Rightarrow} y_3 = 0 \quad (iii)$$

$$(i), (ii), (iii) \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ y_3 = 0$$

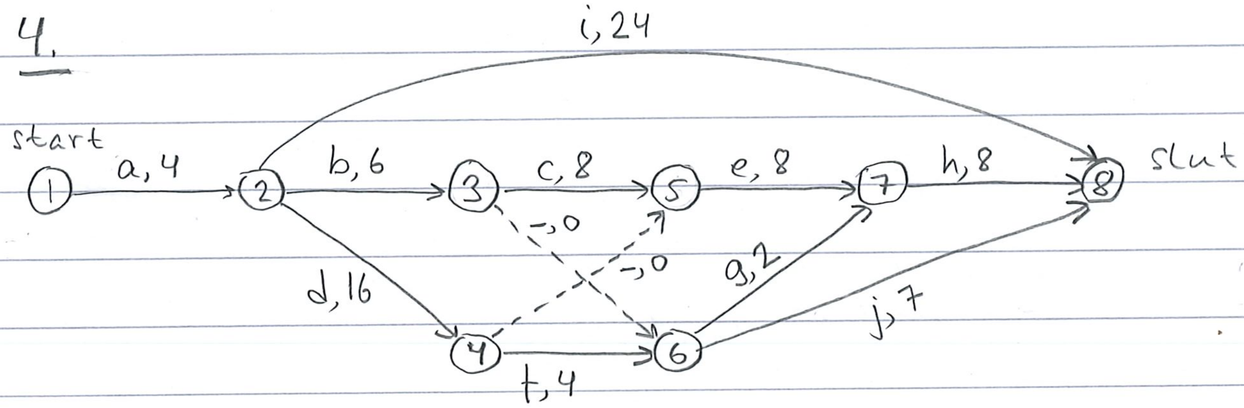
$$\begin{cases} \underset{(iv)}{\Rightarrow} x_4 = 0 \\ \underset{(v),(vi)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 24 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 17 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + t \\ x_2 = 3 - t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$ som uppfyller (3) och $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ omm $0 \leq t \leq 2$

Alla optima: $x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$ där $0 \leq t \leq 2$

med $z^* = 58$

4.



Bellmans ekvationer: $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_j = \max_i \{y_i + c_{ij}\}, \ j = 2, \dots, 8 \end{cases}$

$y_1 = 0, \quad p_1 = -$ ←

$y_2 = 0 + 4 = 4, \quad p_2 = 1$ ←

$y_3 = 4 + 6 = 10, \quad p_3 = 2$

$y_4 = 4 + 16 = 20, \quad p_4 = 2$ ←

$y_5 = \max\{10+8, 20+0\} = 20, \quad p_5 = 4$ ←

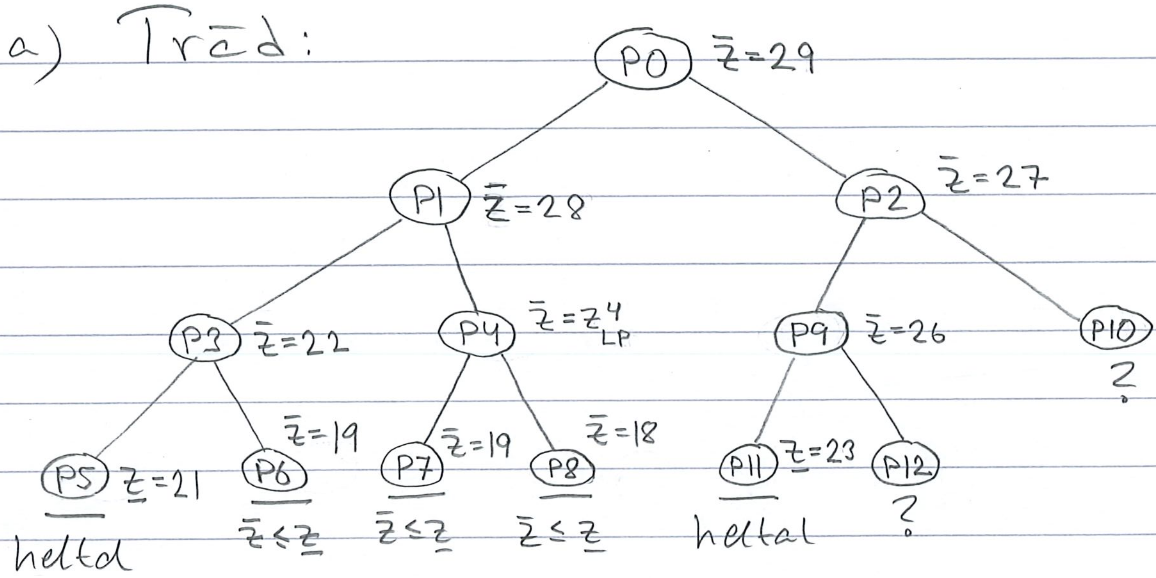
$y_6 = \max\{10+0, 20+4\} = 24, \quad p_6 = 4$

$y_7 = \max\{20+8, 24+2\} = 28, \quad p_7 = 5$ ←

$y_8 = \max\{4+24, 24+7, 28+8\} = \underline{\underline{36}}, \quad p_8 = 7$ ←

Kortaste möjliga tidsåtgång: 36 veckor.
Dyraste väg: 1-2-4-5-7-8.
Aktiviteter som inte får försenas: a, d, e, h
(Kontroll: 4+16+8+8 = 36 OK!)

5. a) Träd:



Högsta funna pessimistiska uppskattning:
$\underline{z}_{P11} = 23 \Rightarrow z^*_{HP} \geq 23.$

Högsta optimistiska uppskattning bland ej färdigavsökta delproblem: $\bar{z}_{P2} = 27 \Rightarrow z^*_{HP} \leq 27.$

Alltså: $23 \leq z^*_{HP} \leq 27.$

Optimistiska uppskattningen är icke-växande med djupet på trädet $\Rightarrow z^4_{LP} \leq \bar{z}_{P1} = 28.$

P4 kapades inte utifrån $\underline{z}_{P5} = 21 \Rightarrow z^4_{LP} > 21.$

Alltså: $21 < z^4_{LP} \leq 28.$

b) Antag att $x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 3$ och $x_1, x_2, x_3, x_4 = 0/1$ gäller.
Det finns två sådana lösningar som uppfyller det första villkoret, (1,0,1,1) och (0,1,1,1), och två som uppfyller det andra, (1,1,1,0) och (1,1,0,1), men ingen som uppfyller båda. Alltså är villkoret $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 2$ en giltig olikhet!

6. a) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 6x_1 + 2x_2 - 8 \\ x_2^3 + 4x_2 + 2x_1 - 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}$

$d^0 \,//\, -\nabla f(x^0)$ och $\|d^0\| = 1 \Rightarrow d^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x^1(t) = x^0 + t d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$

$\varphi(t) = f(x^1(t)) = \frac{1}{16} t^4 + \frac{1}{16} t^4 + \frac{3}{2} t^2 + t^2 + t^2 - \frac{8}{\sqrt{2}} t - \frac{8}{\sqrt{2}} t = \frac{1}{8} t^4 + \frac{7}{2} t^2 - \frac{16}{\sqrt{2}} t$

$\varphi'(t) = \frac{1}{2} t^3 + 7t - \frac{16}{\sqrt{2}}$

$\varphi'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 0$

$\varphi''(t) = \frac{3}{2} t^2 + 7 \Rightarrow \varphi''(\sqrt{2}) = 10 \geq 0 \Rightarrow$ minimum!

$t_0 = \sqrt{2}$ är optimal!

b) $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 6 & 2 \\ 2 & 3x_2^2 + 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$-\nabla^2 f(x^0) \nabla f(x^0) = -\frac{1}{6 \cdot 4 - 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} \,//\, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ välj $d_N^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^0)^T d_N^0 = (-8, -8) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -24 < 0$

$\Rightarrow$ avtagenderiktning!

Enklare lösning:

$f(x)$ konvex $\Rightarrow \nabla^2 f(x)$ är positivt semidefinit för alla x $\Rightarrow \nabla^2 f(x^0)$ är positivt semidefinit

$$\det(\nabla^2 f(x^0)) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

$\Rightarrow$

$\nabla^2 f(x^0)$ är positivt definit $\Rightarrow$

Newton-riktningen är en avtagenderiktning!

c) $\underline{\underline{x^1}} = x^0 + t_0 d^0 = x^0 + t_0(-\nabla f(x^0)) \underset{\uparrow}{=} x^0 + t_0(q - Qx^0) =$

$\nabla f(x) = Qx - q$

$\underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{x^0 + t_0 Q(x^1 - x^0)}} \Rightarrow Q(x^1 - x^0) = \frac{1}{t_0}(x^1 - x^0) \Rightarrow$

$Qx^1 - q = 0$

$x^1 - x^0$ är en egenvektor till Q och motsvarande egenvärde är $1/t_0$!

7. a) Punkten $\bar{x}$ är tillåten. Endast villkoret $g_1(x) = x_1x_2 - 3 \leq 0$ är uppfyllt med likhet. Vidare är

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{5}}_{>0} \nabla g_1(\bar{x}).$$

Alltså är $\bar{x}$ en KKT-punkt!

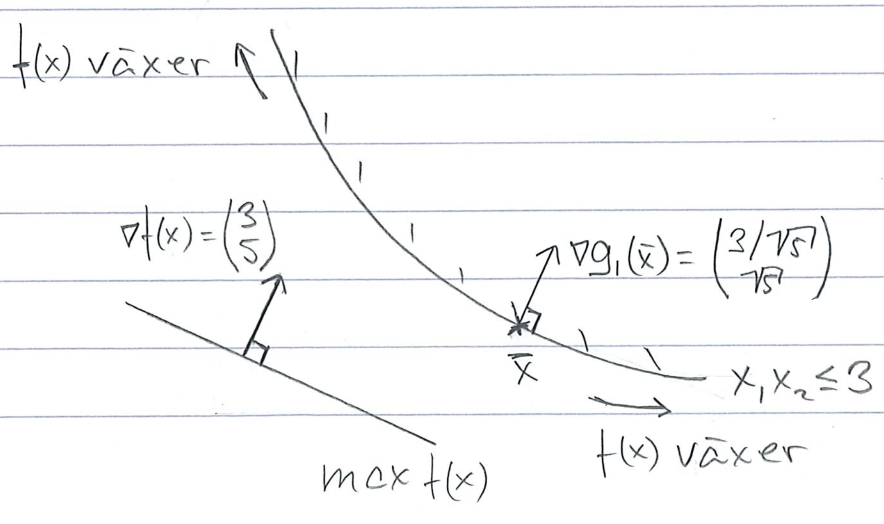
Är $\bar{x}$ ett lokalt maximum?
Studera $f(x)$ längs randen $g_1(x) = 0$, dvs $x_1x_2 - 3 = 0$, eller $x_2 = 3/x_1$.
Låt $h(x_1) = f(x_1, 3/x_1) = 3x_1 + 15/x_1$.

$h'(x_1) = 3 - 15/x_1^2 \Rightarrow h'(\sqrt{5}) = 3 - 15/5 = 0$
$\Rightarrow \bar{x}_1 = \sqrt{5}$ är en stationär punkt!

$h''(x_1) = 30/x_1^3 \Rightarrow h''(\sqrt{5}) = 30/5\sqrt{5} = 6/\sqrt{5} > 0$

Alltså är $\bar{x}_1 = \sqrt{5}$ ett lokalt <u>minimum</u>!

$\bar{x}$ är en KKT-punkt och ett lokalt <u>minimum</u>! Falskt!



b) Låt $f_1(x) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 18x_1 - 12x_2$ och
$f_2(x) = e^{x_1^2} \cdot e^{x_2^2} \cdot e^{x_1x_2}$.

$$\det(\nabla^2 f_1(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(4-\lambda) - 4 =$$

$$= \lambda^2 - 14\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{13} \geq 0, \ \forall x_1, x_2$$

$\Rightarrow f_1(x)$ konvex på R^2

$$f_2(x) = e^{x_1^2} \cdot e^{x_2^2} \cdot e^{x_1x_2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}$$

Studera $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.

$$\det(\nabla^2 g(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \geq 0 \\ \lambda_2 = 3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow g(x)$ konvex på R^2

$\left.\begin{array}{l} e^y \text{ är konvex och icke-avtagande på } R \\ g(x) \text{ konvex på } R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_2(x) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}$ är konvex på R^2

$f_1(x)$ och $f_2(x)$ konvexa på $R^2 \Rightarrow$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ konvex på R^2. Sant!

c) Lagrange-relaxation med $u_1 = 2$ och $u_2 = 1$:

$$h(2,1) = \min -17x_1 - \dots - 7x_5 + 2\cdot(5x_1 + \dots + 3x_5 - 11) + 1\cdot(6x_1 + \dots + 2x_5 - 11) =$$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0/1$

$$= -33 + \min_{x_1 = 0/1}(-x_1) + \min_{x_2 = 0/1} 2x_2 + \min_{x_3 = 0/1}(-2x_3) + \min_{x_4 = 0/1} 2x_4 + \min_{x_5 = 0/1} x_5 =$$

$$= -33 - 1 + 0 - 2 + 0 + 0 = -36$$ för $x(2,1) = (1,0,1,0,0)$

Alltså: $z^* \geq -36$

Är $x(2,1)$ tillåten? Sätt in!

$5 + 0 + 4 + 0 + 0 = 9 \leq 11$ OK

$6 + 0 + 2 + 0 + 0 = 8 \leq 11$ OK

Ja! Alltså: $z^* \leq -17 - 0 - 12 - 0 - 0 = -29$

Slutsats: $-36 \leq z^* \leq -29$. Sant!