Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	8:e juni 2016
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Inga.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Företag A tillverkar tre produkter, P_1, P_2 och P_3, med hjälp av två resurser, R_1 och R_2. Varje tillverkad enhet av produkterna P_1, P_2 och P_3 ger 25, 30 respektive 20 kronor i vinst. Varje tillverkad enhet av produkterna P_1, P_2 och P_3 kräver 50, 24 respektive 25 enheter av resurs R_1 samt 30, 33 respektive 15 enheter av resurs R_2. Det finns 2400 och 2100 enheter tillgängliga av resurs R_1 respektive R_2. Företaget vill maximera den totala vinsten från produktionen.

Företag B, som har god kännedom om produktionen i företag A, vill försöka hyra de 2400 respektive 2100 enheterna av resurserna R_1 och R_2 från företag A. Frågan är då hur mycket man skall erbjuda sig att betala per enhet av resursen R_1 och per enhet av resursen R_2, för att det inte ska bli fördelaktigare för företag A att istället tillverka någon av produkterna P_1, P_2 eller P_3. Företag B vill naturligtvis inte betala onödigt mycket, varför man alltså vill göra ett erbjudande som garanterar att man kan få hyra hela resurserna R_1 och R_2, men till minimal total kostnad.

Formulera en *linjär optimeringsmodell* för den frågeställning som *företag B* har. **(3p)**

Uppgift 2.

Betrakta systemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \geq 0, \end{cases}$$

som saknar lösning. Antag att de två högerleden kan ökas med $x_4 \geq 0$ respektive $x_5 \geq 0$ enheter, till kostnader 2 och 5 per enhet, och att vi vill skapa en tillåten lösning till minimal kostnad. Detta ger upphov till det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \min & 2x_4 + 5x_5 \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 + x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 + x_5 \\ & x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \;,\; x_4 \;,\; x_5 \geq 0. \end{array}$$

a) Teckna det duala problemet. **(1p)**

b) Lös det duala problemet grafiskt. **(1p)**

c) Använd komplementaritet för att beräkna en optimallösning till det givna primala problemet. **(1p)**

Uppgift 3.

a) Lös det linjära optimeringsproblemet

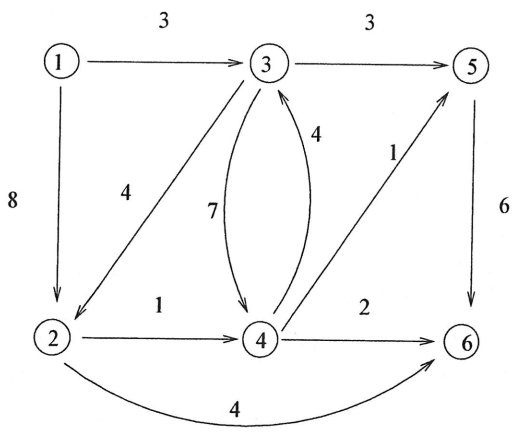
$$\begin{array}{lrcrcr} \max & z & = & 3x_1 & + & x_2 \\ \text{då} & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 13 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

med simplexmetoden. Starta i origo. Illustrera problemet med en figur i (x_1, x_2) − planet. Visa iterationssekvensen i figuren. **(2p)**

b) Antag att x_1 och x_2 skulle vara heltaliga. Använd lämplig rad i optimaltablån för det linjära problemet för att ta fram ett Gomory-snitt. Definierar det funna snittet en fasett till det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna? **(1p)**

Uppgift 4.

Betrakta nedanstående riktade nätverk med bågkostnader och problemet att finna en billigaste väg från nod 1 till nod 6.



a) Lös problemet med Dijkstras algoritm. **(1p)**

b) Teckna Bellmans ekvationer för det givna problemet och visa att de nodpriser som beräknades i deluppgift *a* uppfyller ekvationerna. **(1p)**

c) Antag att *samtliga* bågkostnader *minskar* med $\delta \geq 0$. Använd Bellmans ekvationer för att avgöra för vilka värden på δ som den i deluppgift *a* funna vägen fortfarande är en billigaste väg. **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2)^2 x_2^2 + (x_2 + 1)^2.$$

a) Visa att *en* iteration med brantaste lutnings-metoden med exakt linjesökning utgående från punkten $x^0 = (1, 1)^T$ ger punkten $x^1 = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})^T$. **(1p)**

b) Utgå åter från punkten $x^0 = (1, 1)^T$ och gör *en* iteration med Newtons metod med exakt linjesökning. **(2p)**

Uppgift 6.

Betrakta det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
z^* = \min & 21x_1 & + & 26x_2 & + & 29x_3 & + & 30x_4 & + & 31x_5 & + & 35x_6 & & \\
\text{då} & 10x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & + & 7x_5 & + & 6x_6 & \leq & 24 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 2 \\
 & & & & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & = & 0/1
\end{array}$$

Lagrange-relaxera det första villkoret med multiplikator $v \geq 0$. Teckna det Lagrange-relaxerade problemet och det Lagrange-duala problemet.

Lös det Lagrange-relaxerade problemet för $v = 1$ och för $v = 3$. Vilken är den starkaste möjliga utsagan om z^* som kan göras utifrån de gjorda beräkningarna? **(3p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Betrakta en reellvärd funktion f av en variabel som är definierad på intervallet $[0,1]$ och som ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad x = 0 \\ 0 & \text{om} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{om} \quad x = 1. \end{cases}$$

Denna funktion är konvex på intervallet $[0,1]$. **(1p)**

b) En tillåten baslösning till systemet

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 13 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 8 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

ges av $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 2, 0, 1)$. **(1p)**

c) Funktionen $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$ är konkav då $x_1 > 0$ och $x_2 > 0$. **(1p)**