Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	7 juni 2017
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett företag skall bemanna en verksamhet genom nyanställningar. Man har tio kandidater att välja på. Verksamheten kräver kompetens inom områdena *A, B och C*, samt ibland även en viss certifiering. De tio kandidaterna uppvisar olika kombinationer av kompetens (ingen, viss eller hög) inom de tre områdena samt certifiering. De är även olika dyra för företaget. I tabellen nedan ges information om de tio kandidaterna. (Här betyder: - = ingen, v = viss, h = hög och c = har certifiering.)

	kandidat									
egenskap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	-	h	h	-	v	v	v	-	h	v
B	v	v	-	h	-	v	h	h	-	-
C	h	-	v	h	h	-	v	v	-	v
cert.		c	c	c	c	c		c		c
kost.	35	50	52	65	48	38	41	55	30	40

Företaget vill att det skall finnas minst tre anställda med kompetens (på nivån viss eller hög) inom varje område (*A, B och C*). Vidare vill man att det ska finnas minst en anställd med hög kompetens inom varje område. Slutligen vill man att minst hälften av de som anställs ska ha certifieringen. Dessa krav ska uppfyllas till minimal kostnad. Formulera företagets problem som ett *linjärt* 0/1-problem. **(3p)**

Uppgift 2.

Givet det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{rrcrcrcll}
z^* = \min z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq & b_1 & \mid \; y_1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & b_2 & \mid \; y_2 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & b_3 & \mid \; y_3 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

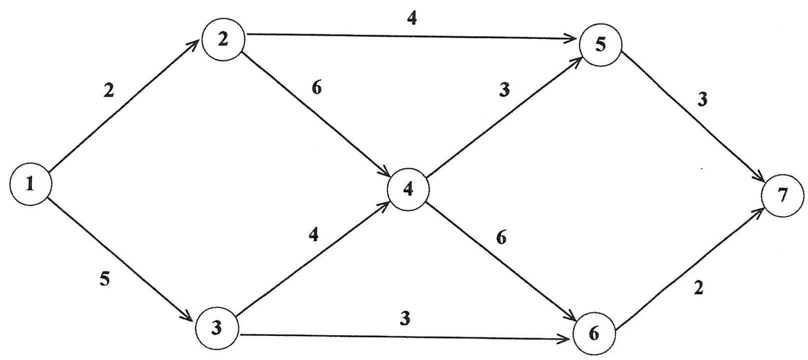
där c_1, c_2, c_3, b_1, b_2 och b_3 är parametrar.

a) Teckna det duala problemet **(1p)**

b) För vilka värden på parametrarna är $x^* = (3, 2, 0)$ och $y^* = (4, 1, 0)$ optimala i det primala respektive duala problemet? **(2p)**

Uppgift 3.

Betrakta nedanstående *acykliska* riktade nätverk med attribut på bågarna.



a) Antag att attributen på bågarna är kostnader och bestäm en *billigaste* väg från nod 1 till nod 7. **(1p)**

b) Antag att attributen på bågarna är kostnader och bestäm en *dyraste* väg från nod 1 till nod 7. **(1p)**

c) Antag att attributen på bågarna är kapaciteter och bestäm en väg med *maximal kapacitet* (dvs en väg vars minimala bågkapacitet är maximal) från nod 1 till nod 7. **(1p)**

Uppgift 4.

Låt $x \in R^2$ och betrakta funktionen

$$f(x) = x_1 - x_1^2 - x_1 x_2^2.$$

a) Avgör för vilka x som funktionen är *konkav*. **(2p)**

b) Beräkna Newton-riktningen i punkten $\bar{x} = (1, 2)^T$ och avgör om funktionen växer eller avtar i denna riktning från $\bar{x}$. **(1p)**

Uppgift 5.

Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \min f(x) = \; & -2x_1 - x_2 - (x_1 - 2x_2 + 4)^3 \\ \text{då } & x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

och punkten $\bar{x} = (2, 3)^T$.

a) Teckna de tillåtna riktningarna i $\bar{x}$. **(1p)**

b) Finns det någon tillåten avtaganderiktning för f i $\bar{x}$? **(1p)**

c) Är $\bar{x}$ ett lokalt minimum till f över det tillåtna området? **(1p)**

Uppgift 6.

Betrakta det kvadratiska problemet

$$\begin{aligned} z^* = \min \; & \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 + 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{då } & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 50 \\ & x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

och dess Lagrange-relaxation

$$\begin{aligned} h(u) = \min \; & \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 + 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + u(50 - 3x_1 - 2x_2 - x_3) \\ \text{då } & x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

där $u \geq 0$. Lös det Lagrange-relaxerade problemet för $u = 2$ och för $u = 5$. Vilka starkaste möjliga uppskattningar av z^* fås från dessa beräkningar?

(3p)

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Om det linjära optimeringsproblemet

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{då} & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 16 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 14 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

löses med simplexmetoden utgående från origo så uppnås ett optimum efter tre iterationer. **(1p)**

b) Antag att ett linjärt heltalsproblem med två variabler, x_1 och x_2, innehåller de två villkoren

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 4x_2 & \leq & 14 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14, \end{array}$$

samt eventuellt ytterligare villkor. Då måste *varje tillåten heltalslösning* uppfylla villkoret $x_1 + x_2 \leq 5$. **(1p)**

c) Givet problemet

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

där $f \in C^2$ och en punkt $\bar{x} \in R^n$. Då gäller att brantaste lutningsriktningen i $\bar{x}$ är likriktad med Newton-riktningen i $\bar{x}$ om och endast om $\nabla^2 f(\bar{x}) = kI$, där I är enhetsmatrisen och $k > 0$. **(1p)**