Matematiska institutionen
Optimeringslära

# TENTAMEN

## TAOP07/TEN1
## OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

| | |
|---|---|
| **Datum:** | 11 juni 2019 |
| **Tid:** | 14.00–19.00 |
| **Hjälpmedel:** | *Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar. |
| **Antal uppgifter:** | 7 |
| | Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. |
| | För godkänt krävs 8 poäng. |
| **Examinator:** | Torbjörn Larsson |
| **Jourhavande lärare:** | Torbjörn Larsson 013-28 24 35 |

**Resultat meddelas per e-post**

## Tentamensinstruktioner

### När Du löser uppgifterna

*Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.*
*Motivera alla påståenden Du gör.*
*Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.*
*Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.*

### Vid skrivningens slut

*Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.*
*Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.*
*Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

## Uppgift 1.

a) Ett optimeringsproblem innehåller de tre 0/1- variablerna $x_1, x_2$ och $y$. Dessa ska anta 0/1−värden som uppfyller att

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 1 \\ y = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Modellera dessa relationer med *linjära* villkor. **(1p)**

b) Ett optimeringsproblem av minimeringstyp innehåller en kontinuerlig variabel $x$ som kan anta värden mellan 0 och $2u$, där $u$ är en positiv konstant. Målfunktionen innehåller en olinjär kostnadsterm $c(x)$ som ges av

$$c(x) = \begin{cases} 0 \text{ om } x = 0 \\ a + px \text{ om } 0 < x \leq u \\ b + p(x - u) \text{ om } u < x \leq 2u, \end{cases}$$

där $a$ och $b$ är konstanter och $p$ är en positiv konstant. Antag att denna olinjära kostnadsterm modelleras som kostnaden C som ges av kraven

$$\begin{aligned} & C = ay_1 + (b - pu)y_2 + px \\ & x \leq uy_1 + 2uy_2 \\ & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 = 0/1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

För att denna modellering ska ge ett värde på C som överensstämmer med det korrekta, dvs $c(x)$, för alla $0 \leq x \leq 2u$, måste konstanterna $a, b, p$ och $u$ uppfylla ytterligare krav. Vilket eller vilka krav måste uppfyllas? **(2p)**

## Uppgift 2.

Låt $X = \{x^1, \ldots, x^p\} \subset R^n$ och $\bar{x} \in R^n$. Då gäller att $\bar{x}$ ligger i det konvexa höljet av $X$ om och endast om det finns $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sådana att

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x^j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, p.$$

Om $\bar{x} \geq 0$ så kan man undersöka om detta gäller genom att lösa fas-1-problemet

$$\begin{array}{lll} w^* = \min w = & & \sum_{i=1}^{n} a_i \\ & \text{då} & \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j \quad + \quad Ia = \bar{x} \\ & & \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \\ & & \lambda_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, p \\ & & a_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

där $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$.

Låt $n = 2, p = 4, x^1 = (0,0)^T, x^2 = (4,3)^T, x^3 = (6,2)^T, x^4 = (3,0)^T$ och $\bar{x} = (5,1)^T$. Undersök om $\bar{x}$ ligger i konvexa höljet av $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ genom att lösa fas-1-problemet

$$\begin{array}{lccccccccccc} w^* = \min w = & a_1 & + & a_2 & & & & & & & & \\ \text{då} & 0\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & + & a_1 & = & 5 \\ & 0\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & + & a_2 & = & 1 \\ & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & & & = & 1 \\ & \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \lambda_3 & , & \lambda_4 & , & a_1, a_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Starta fas-1 med $a_1, a_2$ och $\lambda_1$ som basvariabler. Verifiera Din slutsats med hjälp av en figur i $R^2$ med punkterna $x^1, x^2, x^3, x^4$ och $\bar{x}$. **(3p)**

## Uppgift 3.

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{rlrrrrrrrrr}
z^* = & \min \quad z = & 58x_1 & + & 18x_2 & + & 44x_3 & + & 9x_4 & & \\
& \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \geq & 21 \\
& & 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \geq & 14 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

a) Teckna det duala problemet. **(1p)**

b) Sätt $x_2 = 3$ i det givna primala problemet (dvs ersätt $x_2$ med konstanten 3). Teckna dualen till det modifierade primala problemet. Lös detta duala problem grafiskt. **(1p)**

c) Utifrån beräkningarna i deluppgift b kan man uppskatta värdet $z^*$. Hur och varför? **(1p)**

---

## Uppgift 4.

Lös kappsäcksproblemet

$$
\begin{array}{rlrrrrrrrrr}
z^* = & \max \quad z = & 23x_1 & + & 18x_2 & + & 12x_3 & + & 6x_4 & & \\
& \text{då} & 10x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & \leq & 15 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1
\end{array}
$$

med trädsökning. Använd djup-först-sökning och avsök alltid noll-grenen först. Observera att $23/10 > 18/8 > 12/6 > 6/5$. **(3p)**

---

## Uppgift 5.

Givet det obegränsade olinjära optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = x_1^2 + 2x_2(x_2 - x_1^2 - 4).$$

a) Utför *en* iteration med brantaste lutningsmetoden från startpunkten $x^0 = (0,0)^T$. **(1p)**

b) Utför *en* iteration med Newtons modifierade metod (dvs Newtons metod med linjesökning) från startpunkten $x^0 = (0,0)^T$. **(1p)**

c) Avgör karaktären på den punkt som uppnåddes i deluppgift b. (Är den en stationär punkt, ett lokalt minimum, etc?) **(1p)**

---

## Uppgift 6.

Betrakta det olinjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr} f^* = \min & f(x) & = & 2x_1^2 & + & x_2^2 & + & x_1x_2 & - & 9x_1 & - & x_2 \\ \text{då} & 8 & - & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 0 & & & & \\ & 11 & - & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 0. & & & & \end{array}$$

a) Avgör om problemet är konvext. **(1p)**

b) Lagrange-relaxera de två villkoren med multiplikatorvärdena $y_1 = 2$ och $y_2 = 1$. Vilken eller vilka slutsatser om $f^*$ leder de gjorda beräkningarna till? **(2p)**

---

## Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Givet ett oriktat nätverk med fem noder och åtta bågar med kostnader enligt tabellen nedan, där a-h är givna konstanter.

| | nod | | | |
|---|---|---|---|---|
| nod | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | a | b | c | - |
| 2 | - | d | e | - |
| 3 | - | - | f | g |
| 4 | - | - | - | h |

Antag att ett billigaste uppspännande träd (minimalträd) ges av bågarna $(1,2),(1,3),(3,4)$ och $(3,5)$. Då måste gälla att $\min\{c,d,e\} \geq b$. **(1p)**

b) Problemet

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 x_2 \\ \text{då} & (\frac{x_1}{a})^2 + (\frac{x_2}{b})^2 \leq 1 \\ & x_1 \quad , \quad x_2 \quad \geq 0, \end{array}$$

där $a$ *och* $b$ är givna positiva konstanter, har en Karush-Kuhn-Tucker-punkt i $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{a}{b}$ **(1p)**

c) Problemet

$$z^* = \min \; x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 + 3x_6 + 2x_7$$

$$\begin{array}{rl} \text{då} & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_3 + x_4 = x_1 + x_6 \\ & x_5 = x_2 + x_3 \\ & x_6 + x_7 = x_5 \\ & x_4 + x_7 = 1 \\ & x_j = 0/1 \quad , \quad j = 1,\ldots,7 \end{array}$$

kan lösas med Dijkstras algoritm. **(1p)**