Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	27 mars 2020
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Allt utom programvaror och lösare. Det är *inte* tillåtet att kommunicera med andra personer under tentamen.
Antal uppgifter:	7 Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningar i uppgiftsordning.
Sänd in dem elektroniskt enligt givna instruktioner.

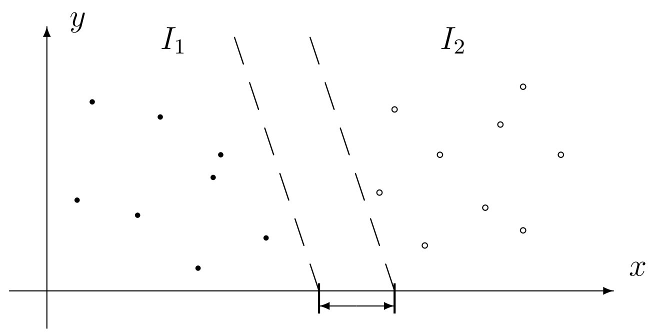
Uppgift 1.

Givet ett antal punkter med givna koordinater $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ som är uppdelade i mängderna I_1 och I_2 enligt bilden nedan. Bestäm två *parallella* linjer som:

1. har formen $a_1x + a_2y = b$, där $a_1, a_2 \geq 0$ och $a_1 + a_2 = 1$,

2. delar av xy-planet så att de två mängderna är skilda åt,

3. befinner sig på så stort avstånd från varandra som möjligt.



De två linjerna kommer att ha olika värden på b och avståndet mellan linjerna defineras som skillnaden mellan det största och det minsta av dessa värden.

Skriv ner tydliga variabeldefinitioner och ge en linjär optimeringsmodell som löser detta problem. **(3p)**

Uppgift 2.

Betrakta bivillkorssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 13 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 10 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Uttryck systemet i basen med $x_B = (x_2, x_3)^T$ och $x_N = (x_1, x_4, x_5)^T$, vilken svarar mot en tillåten baslösning. **(1p)**

b) Avgör om systemet har en tillåten lösning där $x_1 = x_2 = 0$ genom att introducera en för detta syfte lämplig målfunktion, uttrycka denna målfunktion i den givna basen, samt använda simplexmetoden utgående från den givna basen. **(2p)**

Uppgift 3.

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{rlrcrcrcl}
v(c) = & \min & x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & & \\
& \text{då} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\
& & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & c \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0,
\end{array}
$$

där c är en reell parameter.

a) Teckna det duala problemet. **(1p)**

b) Finn ett explicit uttryck för $v(c)$ genom att studera det duala problemet grafiskt. **(2p)**

Uppgift 4.

Givet ett riktat nätverk med fem noder och bågar med kostnader enligt tabellen nedan, där c_{25} är en reell parameter.

	till				
från	1	2	3	4	5
1	–	-1	4	–	–
2	–	–	3	2	c_{25}
3	–	–	–	–	–
4	–	2	5	–	–
5	–	–	–	-3	–

Betrakta problemet att finna billigaste vägar från nod 1 till alla andra noder.

a) Teckna Bellmans ekvationer för problemet. Låt $c_{25} = 2$. Verifiera att Bellmans ekvationer löses av nodpriserna $y_1 = 0,\ y_2 = -1,\ y_3 = 2,\ y_4 = -2$ och $y_5 = 1$. Vilka bågar ingår i billigaste-väg-trädet? **(1p)**

b) För vilka värden på c_{25} fås detta billigaste-väg-träd? Besvara frågan med hjälp av Bellmans ekvationer. **(2p)**

Uppgift 5.

Givet det kvadratiska optimeringproblemet

$$
\begin{array}{rl}
\min\ f(x) = & \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3) + 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\
\text{då} & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
 & -x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -4.
\end{array}
$$

a) Avgör om problemet är konvext. **(1p)**

b) Avgör om $\bar{x} = (1,1,1)^T$ är en KKT-punkt. **(2p)**

Uppgift 6.

Givet det primala problemet

$$
\begin{array}{rl}
\min & f(x) \\
\text{då} & g_i(x) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \\
 & x \in X.
\end{array}
$$

a) Låt $\bar{u}_i,\ i = 1, \dots, m$, vara givna multiplikatorer och betrakta det Lagrange-relaxerade problemet

$$\min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x).$$

Antag att $x(\bar{u})$ löser detta relaxerade problem. Visa att då är $x(\bar{u})$ *optimal* i det *modifierade* primala problemet

$$
\begin{array}{rl}
f^* = min & f(x) \\
\text{då} & g_i(x) = b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \\
 & x \in X,
\end{array}
$$

där $b_i = g_i(x(\bar{u})),\ i = 1, \dots, m.$ **(1p)**

b) Betrakta 0/1-problemet

$$
\begin{array}{rl}
\min\ f(x) = & -4x_1 - 9x_2 - 7x_3 - 3x_4 \\
\text{då}\ g_1(x) = & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = b_1 \\
g_2(x) = & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = b_2 \\
x \in X = & \{0,1\}^4
\end{array}
$$

och multiplikatorerna $\bar{u}_1 = 1$ och $\bar{u}_2 = 2$. Sätt $b_1 = b_2 = 0$ och lös det Lagrange-relaxerade problemet. För vilka värden på b_1 och b_2 är den relaxerade lösningen optimal i det givna problemet? **(2p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Givet det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2)^2 x_2^2 + (x_2 + 1)^2.$$

I punkten $\bar{x} = (1, 1)^T$ är Newton-riktningen parallell med vektorn $\bar{d} = (0, -1)^T$. **(1p)**

b) Villkoren $x_1 + x_3 + x_5 \geq 1$ och $x_2 + x_4 + x_6 \leq 2$ är giltiga olikheter för mängden av tillåtna lösningar till

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 12 \\ x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; x_6 = 0/1. \end{cases}$$

(1p)

c) Mängden som definieras av villkoren

$$\begin{cases} -x_1 x_2 \leq -1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

är icke-konvex. **(1p)**