Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Optimeringslära

Optimeringslära grundkurs för Y
Exempelsamling
1 januari 2013

Exempelsamling

TAOP07 Optimeringslära grundkurs för Y

1. Låt mängderna $C, D \subseteq R^n$ vara konvexa, funktionen $f : C \to R$ vara konvex och $\alpha \in R$. Visa att följande mängder är konvexa.

    a) $\alpha C = \{\alpha x | x \in C\}$

    b) $C + D = \{x + y | x \in C, y \in D\}$

    c) $\{x \in C | f(x) \leq \alpha\}$

2. Låt mängden $C \subseteq R^n$ och funktionerna $f, g : C \to R$ vara konvexa och låt $\alpha \geq 0$. Visa att följande funktioner är konvexa.

    a) $f + g$

    b) αf

    c) $\max\{f, g\}$

3. Vilka av följande funktioner är konvexa?

    a) $\ln x$, för $x > 0$

    b) e^x

    c) $\ln(1 + e^x)$

    d) $x \ln x$, för $x > 0$

    e) $e^{-x^2/2}$

    f) $4x_1 + x_2^3 + \frac{1}{x_1} + 2x_2 \ln x_2$, för $x_1, x_2 > 0$

    g) $2e^{x_1} - \sqrt{x_1} - 5x_2 - 3\ln x_2$, för $x_1 \geq 0$ och $x_2 > 0$

4. Avgör om mängderna nedan är konvexa eller ej. Bevis eller motexempel.

    a) $\{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1;\ x_1^2 + x_2^2 \geq 1/4\}$

    b) $\{x \in R^n \mid x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$

    c) $\{x \in R^2 \mid x_1 + x_2^2 \leq 5;\ x_1^2 - x_2 \leq 10;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0\}$

    d) $\{x \in R^2 \mid x_1 - x_2^2 \geq 1;\ x_1^3 + x_2^2 \leq 10;\ 2x_1 + x_2 \leq 8;\ x_1 \geq 1;\ x_2 \geq 0\}$

5. Låt $x > 0$ och $f(x) = x^p$. För vilka p är f en konvex funktion?

6. Låt funktionen $h : R \to R$ vara strikt konkav. Blir då mängden $\{x \mid h(x) \leq 0\}$ alltid icke-konvex? Bevisa eller ge ett exempel där mängden blir konvex!

7. En mängd $C \subseteq R^n$ sådan att $\alpha c \in C$ för alla $c \in C$ och $\alpha > 0$ kallas en *kon*. Konstruera (rita) två koner i R^2: en som är konvex och en som är icke-konvex. Visa att mängden $\{x \in R^n | Ax \leq 0\}$, där $A \in R^{m\times n}$, är en konvex kon.

8. (Konvext hölje.)

    a) Låt punkterna $x^1, ..., x^P \in R^n$ vara givna. Visa att mängden

    $$\left\{ x \in R^n \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i x^i \text{ för några } \lambda_i \geq 0,\ i = 1, .., P, \text{ sådana att } \sum_{i=1}^{P} \lambda_i = 1 \right\}$$

    är konvex. (Denna mängd kallas det *konvexa höljet* av punkterna $x^1, .., x^P$.) Illustrera resultatet i R^2.

b) Antag att X är en konvex delmängd av R^n och att $x^1, .., x^P \in X$. Visa att om $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, .., P$, och $\sum_{i=1}^{P} \lambda_i = 1$ så gäller att $\sum_{i=1}^{P} \lambda_i x^i \in X$.

9. (Konvext optimeringsproblem.)

Optimeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in X \end{array}$$

sägs vara konvext om mängden $X \subseteq R^n$ av tillåtna lösningar är konvex och målfunktionen $f : X \to R$ är konvex på X. Definiera för detta problem begreppen lokalt respektive globalt optimum och visa att ett lokalt optimum även är globalt. Visa vidare att om f är *strikt* konvex så kan problemet inte ha alternativa optimallösningar, dvs att i detta fall är ett optimum *unikt*.

10. (Konvexitet hos optimalmängd.)

a) Betrakta det generella optimeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in X. \end{array}$$

Antag att mängden $X \subseteq R^n$ är konvex och att funktionen $f : X \to R$ är konvex på X, varvid även problemet är konvext. Visa att mängden av optimallösningar är konvex och att om problemet har två distinkta (olika) optimallösningar så har det oändligt många.

b) Konstruera ett icke-konvext problem som har exakt två optimallösningar.

11. (Kvasi-konvexitet.)

En funktion $f : R^n \to R$ sägs vara *kvasi-konvex* om det för varje konstant $c \in R$ gäller att *nivåmängden* $\{x | f(x) \leq c\}$ är konvex. Som benämningen antyder är kvasi-konvexitet hos en funktion en svagare egenskap än konvexitet. Visa detta genom att lösa följande två deluppgifter.

a) Visa att varje konvex funktion är kvasi-konvex

b) Ge exempel på en funktion som är kvasi-konvex men *ej* konvex.

12. Betrakta ett konvext optimeringsproblem på formen

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \leq b_i,\ i = 1, ..., m \end{array}$$

a) Låt x^* beteckna en optimallösning. Antag att problemet utökas med bivillkoret $g_{m+1}(x) \leq b_{m+1}$ och att punkten x^* är otillåten i detta bivillkor, dvs att $g_{m+1}(x^*) > b_{m+1}$. Låt x^{**} beteckna en optimallösning till det utökade problemet och antag att $f(x^{**}) > f(x^*)$, dvs att x^{**} *inte* är ett alternativt optimum i det ursprungliga problemet. Visa att $g_{m+1}(x^{**}) = b_{m+1}$ gäller.

b) Visa med ett enkelt numeriskt exempel att slutsatsen i deluppgift a) inte säkert gäller för ett *icke-konvext* problem.

13. (Skärning av konvexa mängder.)

Låt mängderna $X_i \subseteq R^n, \ i = 1, ..., m$, vara konvexa. Visa att även snittmängden

$$X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

är konvex.

Ovanstående resultat är fundamentalt vid ett studium av egenskaperna hos ett problem på formen

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m. \end{array}$$

Förklara varför!

14. (Konvexitet hos linjära problem.)

Varje linjärt optimeringsproblem kan skrivas på formen

$$\begin{array}{rr} \min z = & c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

där $x, c \in R^n, A \in R^{m \times n}$ och $b \in R^m$. (Om problemet ursprungligen har ett annat utseende så kan det alltid transformeras till ovanstående form.) Visa utifrån tillämpliga definitioner att detta problem är konvext.

[Anmärkning: Härav följer att varje linjärt optimeringsproblem är konvext och att ett linjärt problem *inte* kan ha lokala optima som inte också är globala, varför lokal optimalitet också alltid påvisar global optimalitet.]

15. Låt $X \subseteq R^n$ och $f : X \to R$ vara konvexa, och betrakta det konvexa problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in X \end{array}$$

Betrakta vidare följande förändringar av detta problem. (Varje modifiering görs utgående från det *givna* problemet.) Avgör för var och en huruvida det modifierade problemet med säkerhet är konvext eller ej. Motivera genom hänvisning till kända resultat eller med enkla motexempel.

a) Till målfunktionen adderas en funktion som är konvex på X.

b) Från målfunktionen subtraheras en funktion som är konvex på X.

c) Från målfunktionen subtraheras en funktion som är linjär på X.

d) Variablerna skall anta heltaliga värden.

e) En viss variabel skall anta ett givet heltaligt värde.

f) Ett villkor av typen $g(x) \leq 0$, där $g : X \to R$ är konvex, tillkommer.

g) Ett villkor av typen $g(x) = 0$, där $g : X \to R$ är konvex, tillkommer.

16. (Relaxering och restrifiering.)

Betrakta problemen

$$f^* = \min \quad f(x) \qquad (P)$$
$$\text{då} \quad x \in S$$

och

$$l^* = \min \quad l(x) \qquad (R)$$
$$\text{då} \quad x \in G.$$

Om $G \supseteq S$ och $l(x) \leq f(x)$ då $x \in S$ så är problemet (R) en *relaxering* av (P). Omvänt är då (P) en *restrifiering* av (R). Låt x_P^* och x_R^* vara optimallösningar till respektive problem. Visa att $l^* \leq f^*$. Vilken är nyttan av detta resultat?

17. (Restrifiering genom inre approximation.)

Betrakta ett problem på formen

$$\begin{aligned} \min \quad & h(x) \\ \text{då} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., m \\ & x \in X, \end{aligned}$$

där mängden $X \subseteq R^n$ är konvex och funktionerna $h : X \to R$ och $g_i : X \to R, \quad i = 1, ..., m$, är kontinuerliga och konvexa på X. Låt $x^1, ..., x^P \in X$. Visa att det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p=1}^{P} h(x^p)\lambda_p \\ \text{då} \quad & \sum_{p=1}^{P} g_i(x^p)\lambda_p \leq 0, \quad i = 1, ..., m \\ & \sum_{p=1}^{P} \lambda_p = 1 \\ & \lambda_p \geq 0, \quad p = 1, ..., P \end{aligned}$$

utgör en *restrifiering* av det föregående.

18. Ett dataföretag har uppskattat antalet servicetimmar som måste utföras under de närmaste fem månaderna, se tabell 1.

Månad	Antal servicetimmar
Januari	6000
Februari	7000
Mars	8000
April	9500
Maj	11500

Tabell 1: Antalet servicetimmar per månad i uppgift 18.

Servicen utförs av anställda tekniker som i början av januari är 50 till antalet. En tekniker kan arbeta upp till 160 timmar per månad. För att täcka framtida behov av tekniker måste nya tekniker (praktikanter) utbildas. Utbildningen tar en månad och kräver 50 timmars handledning av en utbildad tekniker. En utbildad tekniker har en månadslön på 15000 kr (oavsett antalet arbetstimmar i månaden) och en praktikant har en månadslön på 7500 kr. I slutet av varje månad slutar 5% av teknikerna för arbete inom något annat företag.

Formulera ett LP-problem som minimerar den totala lönekostnaden för den givna perioden, givet att antalet servicetimmar måste tillgodoses.

19. Snabbmatsföretaget Turkeyco erbjuder till lunch två typer av kalkonkotletter. En kotlett består av både ljust och mörkt kalkonkött. Kotlett I säljs för 16 kr/hg och måste innehålla minst 70% vitt kött. Motsvarande data för kotlett II är 12 kr/hg och minst 60% vitt kött. Som mest kan 15 kg kotlett I och 9 kg kotlett II säljas. Kalkonerna, två olika typer, köps in från kalkonfarmen GobbleGobble. En kalkon av typ A kostar 40 kr och ger 5 hg vitt kött och 2 hg mörkt kött. Motsvarade data för en kalkon av typ B är 32 kr och ger 3hg vitt kött respektive 3 hg mörkt kött.

    Formulera problemet att maximera Turkeyco's vinst som ett LP-problem.

20. (Blandningsproblem.)

    Ett oljeraffinaderi står inför uppgiften att tillverka två bensinkvaliteter i enlighet med kraven som ges i tabell 2.

Bensinsort	Minsta oktantal	Maximalt ångtryck (mbar)	Efterfrågad volym (ton)
Regular	90	10	10
Premium	95	8	25

Tabell 2: Krav på bensinsorterna i uppgift 20.

Råvarorna som kan användas och deras egenskaper beskrivs i tabell 3.

Råvara	Tillgång (ton)	Oktantal	Ångtryck (mbar)	Kostnad (kr/ton)
Butan	12	120	60	1500
Tung nafta	15	75	4	2400
Katalytiskt reformat	25	100	2,6	3000

Tabell 3: Råvarornas egenskaper i uppgift 20.

Vid bensintillverkningen gäller att oktantalet och ångtrycket i en bensinsort blir proportionella mot kvantiteten av respektive råvara som används. Detta betyder t ex att om 60% butan och 40% tung nafta blandas till en bensinsort så blir oktantalet $0,60 \times 120 + 0,40 \times 75 = 102$.

Formulera raffinaderiets problem att bestämma de bensinblandningar som minimerar råvarukostnaderna och tillgodoser kundernas krav.

21. Ett fartyg har J stycken lastrum med både vikt och volymmässiga kapacitetsbegränsningar. Lastrum j har viktkapacitet w_j (ton) och volymkapacitet v_j (m^3). Fartyget kan lasta I olika varor. Vara i karakteriseras av a_i = tillgänglig mängd av vara i (ton), b_i = volym av vara i (m^3/ton) och c_i = förtjänst per lastat ton av vara i.

    Av stabilitetsskäl skall den totala mängden som lastas i varje lastrum vara proportionell mot lastrummets kapacitet. Dvs för varje lastrum j_1, j_2 ($j_1 \neq j_2$) gäller

$$\frac{\text{Lastat antal ton i lastrum } j_1}{\text{Kapacitet i ton för lastrum } j_1} = \frac{\text{Lastat antal ton i lastrum } j_2}{\text{Kapacitet i ton för lastrum } j_2}$$

    Formulera problemet att bestämma hur varorna skall lastas för att förtjänsten ska bli så stor som möjligt!

22. En bondefamilj äger en gård på 50 ha och kan använda jorden för att odla soja, majs och vete. Dessutom kan familjen ha mjölkkor och höns. Hönshuset rymmer 3000 hönor och ladugården har plats för 32 kor.

    Familjen kan arbeta totalt 3500 persontimmar under vintern (oktober - april) och 4000 persontimmar under sommaren (maj - september). De yngre medlemmarna i familjen kan arbeta totalt högst 200 tim på granngården för 50 kr/tim under vintern och för 60 kr/tim under sommaren istället för att arbeta på familjegården.

    Varje mjölkko som familjen har medför en investering på 12 000 kr och kräver 100 persontimmars arbete under vintern och 50 persontimmar under sommaren. Dessutom måste 0,6 ha per ko av jorden användas till betesmark. Nettointäkten för en mjölkko under ett år är 10 000 kr. Varje höna medför en investering på 90 kr och ger en nettointäkt på 50 kr. Arbetsinsatsen per höna och år beräknas till 0,6 och 0,3 persontimmar under vintern respektive sommaren. Totalt kan familjen investera 400 000 kr under det kommande året.

	Soja	Majs	Vete
Arbetsinsats vinter	50	85	25
Arbetsinsats sommar	125	190	100
Nettointäkt	15	22	11

Tabell 4: Arbetsinsats och nettointäkter i uppgift 22.

    Arbetsinsatsen (i persontimmar) samt nettointäkten (1000-tal kr) per ha odlad mark av soja, majs och vete ges av tabell 4.

    Familjen ska bestämma hur gårdens jord ska utnyttjas för att maximera det kommande årets nettointäkt. Formulera som ett LP-problem. Lös ej!

23. (Kapningsproblem.)

En möbelfabrikör som tillverkar ett mycket flexibelt hyllsystem har fått en order på ett sådant system till ett större kontor. Ordern omfattar bland annat ett stort antal hyllplan, närmare bestämt 211 hyllplan på 5 dm, 395 hyllplan på 7 dm, 610 hyllplan på 9 dm och 97 hyllplan på 11 dm. Alla hyllplan är lika breda och tjocka. De skall tillverkas genom att kapas ur brädor som är 30 dm långa. Dessa brädor kan kapas enligt fem *kapningsmönster*, vilka ger utbyte av hyllplan av olika längder enligt nedanstående tabell. Några av mönstren ger också ett spill, vilket är värdelöst. Olika brädor kan vid tillverkningen av hyllplan kapas enligt olika mönster, se tabell 5.

Mönster	Antal hyllplan av resp längd				Spill
nr	5 dm	7 dm	9 dm	11 dm	
1	2	0	1	1	–
2	1	2	1	0	2 dm
3	1	1	2	0	–
4	1	3	0	0	4 dm
5	2	1	0	1	2 dm

Tabell 5: Kapningsmönster i uppgift 23.

De brädor som kapas skall, naturligtvis, ge tillräckligt många hyllplan av de olika längderna för att ordern skall kunna uppfyllas, men för att maximera vinsten vill fabrikören förbruka så få brädor som möjligt. Konstruera en linjär optimeringsmodell för fabrikörens problem!

24. Göta Lantmän tillverkar många olika fodertyper. Nu skall tre fodersorter för grisar introduceras på marknaden. Behovet av grisfodersorterna beräknas vara 500 ton för Bas, 300 ton för Standard samt 400 ton för Special. Ingredienserna i fodervarianterna ska ligga mellan vissa minimi- och maximinivåer för att rätt näringsinnehåll ska erhållas. Dessa nivåer specificeras i tabell 6 för de olika fodersorterna (siffrorna anger andel av innehållet i viktsprocent).

	Foder					
Ingrediens	Bas		Standard		Special	
	Min	max	Min	Max	Min	Max
Protein	6	–	7	–	9	–
Kolhydrater	35	55	40	60	50	70
Vitamin X	0,5	–	1,0	–	1,2	–

Tabell 6: Minimi och maximinivåer, uppgift 24.

Dessa ingredienser finns i Göta Lantmäns råvaror vete, råg, korn, havre och majs. Innehållet i respektive råvara anges i tabell 7 (i viktsprocent).

Kostnaden för dessa råvaror (per kg) samt tillgänglig mängd (ton) specificeras i tabell 8.

Ingrediens	Vete	Råg	Korn	Havre	Majs
Protein	10	10	6	11	12
Kolhydrater	60	45	40	50	40
Vitamin X	2,0	1,0	0,5	2,2	2,3

Tabell 7: Råvaruinnehåll, uppgift 24.

Råvara	Kostnad per kg	Tillgång i ton
Vete	1,50	Obegränsad
Råg	1,60	Obegränsad
Korn	1,00	Obegränsad
Havre	1,70	1000
Majs	2,50	500

Tabell 8: Råvarukostnad, uppgift 24.

Göta Lantmän önskar minimera råvarukostnaden för produktionen av de önskade fodermängderna. Formulera problemet som ett LP-problem. Använd gärna generella beteckningar. Lös ej!

25. En hönsfarm med 112 m^2 lokalyta kan under den närmaste 12-veckorsperioden utnyttjas för uppfödning av kycklingar (i enheter om 28), ankor (i enheter om 18) och kalkoner (i enheter om 8). Utrymmes- och arbetskraftsbehovet samt vinsten – exklusive arbetskostnader – som uppkommer vid försäljningen efter 12-veckorsperioden ges i tabell 9.

	Utrymme (m^2/enhet)	Arbetskraftsbehov (h/vecka/enhet)	Vinst exkl. arbetskostn. (kr/enhet)
Kycklingar	1,2	3	1300
Ankor	1	2	860
Kalkoner	0,8	1	440

Tabell 9: Utrymmes- och arbetskraftsbehovet samt vinsten, uppgift 25.

Uppfödaren har varje vecka tillgång till 200 arbetstimmar till kostnaden 30 kr/h och dessutom 45 övertidstimmar till kostnaden 35 kr/h. Vilken uppfödningsstrategi ska ägaren välja om målet är att maximera nettovinsten (vinst–arbetskostnad) under den aktuella 12-veckorsperioden. Formulera problemet som ett LP-problem. Lös ej!

26. Ett postkontor kräver olika antal anställda på plats under veckans olika dagar. Antalet som krävs varierar enligt 17, 13, 15, 19, 14, 16 och 11 för perioden måndag–söndag. Enligt fackliga avtal skall varje anställd arbeta fem dagar i sträck och därefter ha två dagar ledigt; till exempel kan en anställd arbeta tisdag–lördag och vara ledig söndag och måndag. Postkontoret önskar uppfylla behovet av personal med enbart heltidsanställda.

a) Formulera en linjär modell för att minimera antalet anställda.

b) Modellen i deluppgift a är kontinuerlig och ger inte säkert en lösning till det verkliga optimeringsproblemet. Varför? Vilken information om det optimala målfunktionsvärdet till det verkliga problemet ger optimum till den kontinuerliga modellen?

27. (Flermålsoptimering.)

En producent av gödningsmedel önskar finna en optimal produktionsplan för två gödningsmedel. Den första produkten är ett högteknologiskt framställt gödningsmedel med en låg halt av fosfater, medan den andra är en av enklare slag, med en hög fosfathalt. Råvarutillgången och -användningen beskrivs av tabell 10.

	Råvara	1	2	3
Åtgång/ton	Produkt 1	2	1	1
	Produkt 2	1	1	0
Tillgång ton/dag		1500	1200	500

Tabell 10: Åtgång och tillgång, uppgift 27.

Intäkten vid försäljning av ett ton gödningsmedel är 15 respektive 10 kronor. Producenten, som inte har sett en optimeringsmodell i sitt liv, har *tre* önskemål. Hon önskar att maximera den sammanlagda intäkten. Hon är dessutom intresserad av att maximera sitt företags marknadsandel, dvs av att sälja så mycket gödningsmedel som möjligt. Därutöver vill hon att företaget skall framstå som högteknologiskt, och vill därför maximera försäljningsvolymen av den första produkten.

Vid samtal med en optimeringskonsult blir hon varse att en optimeringsmodell normalt har *en* målfunktion. Konsulten föreslår att använda en s.k. målprogrammeringsansats, och ber därför producenten att ange målsättning för varje målfunktion. För den dagliga intäkten angavs då 13 000 kronor, för den totala försäljningen 1150 ton/dag och för försäljningen av den högteknologiska produkten 400 ton/dag. Konsulten bad dessutom producenten att ange ett mått på "förlusten" vid ouppfyllande (understigande) av de olika målsättningarna och fick till svar 0,5, 0,3 respektive 0,2 per enhets negativ relativ avvikelse från målsättningarna. Konsulten kunde därefter sätta upp en LP-modell för att finna en produktionsplan med en minimal totalförlust. Hur såg denna LP-modell ut?

28. Ett producerande företag har förbundit sig att leverera en viss vara i kvantiteterna $b_1, ..., b_6$ kg under de kommande 6 veckosluten. Produktionskostnaden för företaget är C_1 kronor/kg, förutsatt att man inte producerar mer än K kg under en och samma vecka. För att kunna producera mer än K kg under en och samma vecka måste man betala övertidsersättning, varför kostnaden för produktion utöver K kg kostar C_2 kronor/kg, där $C_2 > C_1$. Till denna högre kostnad kan man producera ytterligare högst 0,4 K kg under veckan.

Företaget kan lagra producerad vara från vecka till vecka. Detta kostar dock p kr per lagrat kg och vecka, och lagret rymmer högst L kg. I början av vecka 1 är lagret tomt, och man vill inte ha något i lager efter vecka 6 (då man fullgjort sina leveranser).

Företaget vill planera sin produktion och lagring under de kommande 6 veckorna på ett sådant sätt att leveransåtaganden uppfylls till lägsta möjliga kostnad. Formulera som ett LP-problem.

29. Avgör om det finns någon punkt som satisfierar villkoren

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.} \end{array}$$

Använd standardmetod.

30. Lös följande maximeringsproblem genom att successivt välja ut basvariabler och lösa motsvarande ekvationssystem. Förändra baserna mellan varje steg enligt inkommande- och utgåendekriterierna i simplexmetoden.

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max z = & 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ \text{då} & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 8 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

31. Betrakta följande linjära optimeringsproblem.

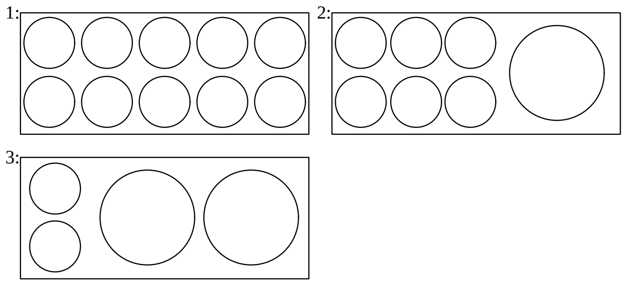
$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max\ z = & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \geq & 10 \\ & 4x_1 & & & + & x_3 & \leq & 8 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Basen $x_B = (x_1\ x_3\ x_5)^T$, där x_5 är slackvariabeln för villkor 2, svarar mot en tillåten baslösning. Uttryck problemet i denna bas.

b) Lös problemet med simplexmetoden utgående från basen ovan.

32. En tillverkare av konservburkar erhåller locken till burkarna från rektangulära metallstycken. Storleken på varje stycke är 4,5 × 11,5 l e. Två olika storlekar av lock behövs och dessa har diametern 2 l e respektive 4 l e. En viss dags produktion kräver 24000 lock av den mindre storleken och 6 000 lock av den större storleken. Problemet för tillverkaren är att bestämma hur man skall stansa dessa lock så att det totala antalet använda rektangulära metallstycken minimeras. I figur 1 framgår hur många lock av de olika typerna som de olika mönstren ger.

Formulera och lös problemet (med simplexmetoden).



Figur 1: Möjliga stansningsmönster i uppgift 32.

33. Avgör med hjälp av simplexmetoden om följande ekvationssystem har en icke-negativ lösning.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 & = & 3 \end{array}\right.$$

34. a) Lös följande linjära optimeringsproblem med simplexmetoden.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max z = & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 10 \\ & & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \geq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Använd linjärprogrammeringsdualitet för att verifiera att resultatet som uppnåtts i deluppgift a) är korrekt.

35. Avgör med hjälp av fas I i simplexmetoden om någon punkt i R^3 satisfierar nedanstående villkor.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & -4 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

36. Lös följande linjärprogrammeringsproblem med simplexmetoden.

$$\begin{array}{lrcrcl} \max z = & 2x_1 & - & x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

37. Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max z = & 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Bestäm med hjälp av simplexmetoden en tillåten lösning som har målfunktionsvärdet $z = 7$.

b) Bestäm, om möjligt, ytterligare en tillåten lösning där $z = 7$.

38. Visa att

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & \geq & 9 \\ -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x_1 + 5x_2 \leq 53$$

genom att formulera och lösa ett lämpligt LP-problem.

39. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcr} \min z = & x_1 & - & x_2 & & \\ \text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Nedan ges tio punkter i R^2.

$(-3, 0)$; $(0, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 2)$; $(6.5, 1.5)$; $(8, 0)$; $(4, -1)$; $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(4, 4)$

a) Vilken/vilka punkter är tillåtna lösningar till problemet?

b) Vilken/vilka punkter kan definieras av en baslösning?

c) Vilken/vilka punkter kan definieras av en tillåten baslösning?

d) Vilken/vilka punkter kan definieras av en degenererad baslösning?

e) Vilken/vilka punkter är optimala till problemet ovan?

40. (Produkt-mixproblem.)

Ett företag tillverkar 3 olika sorters bildäck. Diagonaldäcken ger 60 kr i vinst per däck, radialdäcken 40 kr och stålradialdäcken 80 kr. Varje däcksort passerar 3 tillverkningssteg i produktionsprocessen. Kapaciteten i dessa tillverkningssteg uttryckt i produktionstid per dag ges i tabell 11.

Process	Antal timmar
Blandning	12
Formning	9
Montering	16

Tabell 11: Tillverkningsstegens kapaciteter i uppgift 40.

Tiden som krävs i varje tillverkningssteg för att tillverka 100 däck av varje sort ges i tabell 12.

	Antal timmar per 100 däck		
Däck	Blandning	Formning	Montering
Diagonal	2	3	2
Radial	2	2	1
Stålradial	2	1	3

Tabell 12: Tiden i respektive tillverkningssteg, uppgift 40.

Bestäm den optimala produktmixen för varje dags produktion under antagandet att allt som tillverkas kan säljas.

41. Formulera problemet

$$\begin{array}{rrcrcl} \max\limits_{x_1,x_2} & \multicolumn{5}{l}{\min\{x_1 + x_2 \; ; \; 2x_1 - x_2\}} \\ \text{då} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

som ett ekvivalent LP-problem.

42. a) Avgör på *lämpligt* sätt om det existerar en tillåten lösning till nedanstående system.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \geq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Om en ursprunglig (dvs icke-artificiell) variabel har en positiv reducerad kostnad i en icke-degenererad optimalbas till ett fas I problem så kommer den att vara lika med noll i varje tillåten lösning till det ursprungliga systemet av bivillkor. Förklara varför så är fallet!

43. Inom vissa optimeringstillämpningar är det av intresse att avgöra huruvida ett givet bivillkor (t.ex. en resursbegränsning) är redundant eller ej, dvs om bivillkoret begränsar det tillåtna området eller om det kan strykas utan att det tillåtna området förändras.

Om det tillåtna området beskrivs av linjära bivillkor så kan problemet att avgöra om ett *givet* bivillkor är redundant eller ej formuleras och lösas som ett linjärt program. Betrakta till exempel bivillkorssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 35 & \quad (0) \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 3 & \quad (1) \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 & \quad (2) \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 11 & \quad (3) \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0. & \quad (4) \end{array} \right.$$

Formulera ett linjärt maximeringsproblem som kan användas för att avgöra om bivillkoret (0) är redundant, dvs om det gäller att *varje* punkt i R^2 som uppfyller restriktionerna (1) - (4) *också* uppfyller bivillkoret (0). Lös det linjära programmet med simplexmetoden och avgör huruvida redundans föreligger eller ej. (Som en *kontroll* av resultatet kan bivillkorssystemet studeras grafiskt.)

44. Lös det linjära problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max z = & 4x_1 & - & x_2 & & & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & \leq & -1 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & -1 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0} \end{array}$$

genom att formulera dess duala problem och lösa detta med simplexmetoden.

45. (Några dualitetssamband.)

Betrakta det linjära programmet (P) och dess dual (D).

$$\begin{array}{cllcl} & \max & z = c^T x & & \\ (P) & \text{då} & Ax & \leq & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cllcl} & \min & v = b^T y & & \\ (D) & \text{då} & A^T y & \geq & c \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

a) Visa svag dualitet, dvs att om $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (P) och $\bar{y}$ är en tillåten lösning till (D) så är $c^T\bar{x} \leq b^T\bar{y}$.

b) Visa att om $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (P), $\bar{y}$ är en tillåten lösning till (D) och $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ så är $\bar{x}$ och $\bar{y}$ optimala i respektive problem.

c) Visa att om $\bar{x}$ och $\bar{y}$ uppfyller att $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ och $\bar{x}^T(A^T\bar{y} - c) = 0$ så är $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$.

d) Visa att om $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (P), $\bar{y}$ är en tillåten lösning till (D) och $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$, så är $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ och $\bar{x}^T(A^T\bar{y} - c) = 0$.

46. (Stark dualitet.)

Givet det linjära programmet

$$\begin{array}{llcl} \max & z = c^T x & & \\ \text{då} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

där matrisen $A \in R^{m\times n}$, med $n \geq m$, har full rang. Antag att problemet har en tillåten lösning och att dess optimala målfunktionsvärde är begränsat.

Visa att det duala problemet har samma optimala målfunktionsvärde (stark dualitet). Beviset skall baseras på att det primala problemet kan lösas med simplexmetoden och utnyttja den optimala partitionering av problemet som simplexmetoden resulterar i. Definiera alla införda beteckningar.

47. Givet LP-problemet

$$\begin{array}{lrrcrcrcrcr} (P) & \min z = & & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & & \\ & \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_3 \leq 0; x_2, x_4 \geq 0.} \end{array}$$

a) Formulera det duala problemet.

b) Lös det grafiskt.

c) Utnyttja komplementaritet för att bestämma optimallösningen till (P).

48. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & & \\ \text{då} & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0. \end{array}$$

Baslösningen där x_2, x_4 och x_5 är basvariabler har basinversen

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Är baslösningen tillåten?

b) Ange tillhörande duala lösning och avgör om den är tillåten.

c) Är baslösningen optimal?

49. För ett linjärt maximeringsproblem med två $\leq$-villkor (s_1 och s_2 är slackvariabel i respektive villkor) och icke-negativa variabler ger simplexmetoden följande information i optimum:

$z = 16$, $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ s_1 \end{pmatrix}$, $\bar{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Ge dualvariablernas värden.

b) Påverkas optimaliteten om variabel x_2 får målfunktionskoefficient som är $\delta_2 = 4$ enheter större än den gamla?

c) Om du fick välja att öka tillgången (högerledet) för de två villkoren, vilket villkor skulle du välja? Varför?

d) Antag att en ny aktivitet x_4 föreslås med målfunktionskoefficient $c_4 = 4$ och bivillkorsvektor $a_4 = (1, 2)^T$. Påverkas optimaliteten? Om så är fallet, vad blir den nya lösningen?

50. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrrcrcrcl} \text{(P)} & \max z = & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\ & \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 5 \\ & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Antag att i en viss iteration av simplexalgoritmen har de ursprungliga variablerna följande värden $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Vi vet att

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm partitioneringen, baslösningen och målfunktionsvärdet samt avgör om motsvarande hörnpunkt är optimal. Om inte, identifiera inkommande och utgående basvariabler.

b) Ange dualen till (P).

c) Avgör med hjälp av LP-dualitet om punkten $x_1 = 1/5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8/5$ är optimal i (P).

51. Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & \leq 8 \\ & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 4 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq 6 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Antag att vi har tillgång till en primal tillåten baslösning $\bar{x} = (0, 0, 4)^T$ och en dual tillåten lösning $\bar{y} = (0, 1, 1)^T$.

a) Starta från lösningen $\bar{x}$ och utför *en* simplex iteration. Nedan anges inversen till startbasmatrisen.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Ange den nya primallösningen. Är denna optimal? Motivera!

c) Ge ett uttryck för alla optimala lösningar i primalen.

52. Nedanstående problem

$$\begin{array}{rrcl} \min z = & c^T x & & \\ \text{då} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

kan omformuleras enligt

$$\begin{array}{rrcl} \min z = & w & & \\ \text{då} & w - c^T x & = & 0 \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Bestäm det optimala värdet på den dualvariabel som är associerad med det första bivillkoret.

53. (Exempel på optimalitetsvillkor för LP.)

Betrakta det linjära programmet

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max z = & 400x_1 & + & 200x_2 & + & 250x_3 & & \\
\text{då} & 6x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 2000 \\
 & 8x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 3000 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 625 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Avgör utan att använda simplexmetoden om lösningen $x^* = (187\frac{1}{2}, 437\frac{1}{2}, 0)^T$ är optimal.

54. a) Lös nedanstående problem med simplexmetoden.

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Teckna det LP-duala problemet.

c) Utnyttja LP-dualitet för att verifiera att den i deluppgift a) beräknade optimallösningen är korrekt. Motivera noga!

d) Betrakta nu det problem som fås om målfunktionen i problemet i deluppgift a) ersätts med

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

där c_1, c_2 och c_3 är parametrar. Utnyttja LP-dualitet för att avgöra för vilka värden på dessa parametrar som den i deluppgift a) funna lösningen är optimal i det nya problemet.

55. Bestäm det duala problemet till följande linjära styrproblem.

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & \multicolumn{3}{l}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(c_k^T x_k + d_k^T u_k)} \\
\text{då} & x_{k+1} & = & Ax_k + u_k \\
 & x_0 & = & a \\
 & u_k & \geq & 0
\end{array}
$$

Här är $x_k, u_k \in R^n$ variabla medan c_k, d_k, A, a är konstanter av passande dimensioner.

56. Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 500 \\
 & 3x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 460 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 420 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Utifrån erfarenheter av lösandet av snarlika problem har vi goda skäl att förmoda att i ett optimum, x^*, gäller att det första villkoret är redundant (dvs betydelselöst) och att x_2^* är positivt. Använd linjärprogrammeringsdualitet för att avgöra om denna förmodan är sann.

57. Din lektionsassistent har på svarta tavlan löst en uppgift som behandlar olika typer av känslighetsanalysfrågeställningar för det linjära programmet

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & \\ \text{då} & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Bland annat har han kommit fram till att skuggpriserna för de två bivillkoren (dvs de optimala värdena på dualvariablerna) är 5/3 respektive 7/3. Undersök på lämpligt sätt om detta är korrekt. (Det är *inte* lämpligt att *lösa* det linjära programmet eller dess dual för att finna skuggpriserna.)

58. (Farkas lemma.)

Betrakta följande två system.

$$(A_1) \left\{ \begin{array}{r} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \qquad (A_2) \left\{ \begin{array}{r} u^T b > 0 \\ u^T A \leq 0 \end{array} \right.$$

(Här är A en $m \times n$-matris och x, u samt b vektorer.)

Farkas lemma säger att exakt ett av systemen (A_1) och (A_2) har en lösning för givna A och b. Använd LP-dualitet för att visa detta.

59. Givet LP-problemet

$$\begin{array}{rrll} (\mathrm{P}) \quad z^* = \min & c^T x & & \\ \text{då} & Ax & \leq b & \\ & x & \geq 0 & \end{array}$$

Antag att (P) modifieras och att det modifierade problemet ger ett optimalt målfunktionsvärde z^*_{NY}. Ange relationen ($\leq, \geq, =$,ingen) mellan z^* och z^*_{NY} för nedanstående modifieringar av (P):

a) ytterligare ett bivillkor tillkommer

b) slackvariabler införs i bivillkoren $Ax \leq b$

c) ytterligare en icke-negativ variabel införs

d) man byter tecken på alla målfunktionskoefficienter

e) villkoren $x \geq 0$ utgår

f) man ersätter $x \geq 0$ med $x \geq 1$ (ett vektorn).

(Om en tillåten lösning till (P) *ej* existerar så definieras $z^*_{NY} = +\infty$.)

60. (Egenskaper hos en optimalvärdesfunktion.)

Antag att det linjära programmet

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

har en tillåten lösning och begränsat optimum för varje $b \in R^m$, och betrakta optimalvärdesfunktionen $v : R^m \to R$ med värdet

$$v(b) = \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

a) Visa att v är styckvis linjär.

b) Visa att v är konvex på R^m.

61. Givet två mängder i R^n:

$$X_1 = \{x \in R^n | a_i^T x \leq b_i \ , \ i = 1, ..., m_1\}$$

och

$$X_2 = \{x \in R^n | d_i^T x \geq e_i \ , \ i = 1, ..., m_2\},$$

där $a_i, d_i \in R^n$, $b_i \in R_+$, och $e_i \in R_+$, $i = 1, 2, ..,$ är givna indata. Formulera ett optimeringsproblem som avgör om $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

62. Betrakta följande LP-problem, där $x \in R^n$.

$$z(c) = \begin{array}{rcl} \min c^T x & & \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Antag att problemet har en tillåten lösning och, för enkelhets skull, att det har begränsat optimum för varje val av c.

a) Visa att funktionen $z : R^n \to R$ är konkav.

b) Antag att x^* är en optimallösning för $c = c^1$ och $c = c^2$. Visa att x^* är optimal för alla $c = \lambda c^1 + (1 - \lambda)c^2, 0 \leq \lambda \leq 1$.

63. (Ett produktmixproblem.)

Den anrika flagg- och vimpeltillverkaren Svenska Fanor AB fabricerar två produkter: flaggor och vimplar, i endast en storlek vardera. Tillverkningen kräver tre moment: tillskärning, sömnad och slutbehandling (mangling och förpackning). Varje dag finns totalt 700, 1600 och 500 minuters arbetstid tillgängliga för de tre momenten. Tidsåtgången för varje flagga eller vimpel i varje moment ges i tabell 13 (i minuter).

Flaggor och vimplar säljs för 400 respektive 250 kronor per styck. Bolaget vill maximera den totala försäljningsintäkten. På inrådan av en optimeringskonsult tillverkar (och säljer) fabriken 200 flaggor och 100 vimplar per dag.

	flagga	vimpel
tillskärning	2	2
sömnad	6	4
slutbehandling	2	1

Tabell 13: Tidsåtgången i respektive arbetsmoment, uppgift 63.

a) Visa matematiskt att produktmixen är optimal. (Grafisk lösning räcker *inte*, och problemet skall *inte* lösas med simplexmetoden.)

b) Bolaget överväger att börja tillverka en mindre flagga, avsedd för upphängning på en kort stång på husfasad. Varje flagga av denna typ kräver 1 minut i vardera av de tre tillverkningsmomenten. Vilket är det lägsta rimliga försäljningspriset för den nya produkten?

c) Bolaget väljer att trots allt inte introducera den nya produkten, utan att istället öka tillverkningen av de två nuvarande produkterna genom en kapacitetsutökning. Närmare bestämt har man en möjlighet att öka den tillgängliga arbetstiden i de tre tillverkningsmomenten med 350, 800 respektive 200 minuter per dag, genom att överta ledig kapacitet i en liknande verksamhet i en närliggande fabrik. Vilket är det högsta tänkbara priset som man är beredd att betala för denna kapacitetsutökning? (Grafisk lösning eller lösning med simplexmetoden accepteras *inte*.)

64. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\min z = & 3x_1 & + & 30x_2 & + & 8x_3 & & \\
\text{då} & & & 5x_2 & + & x_3 & \geq & 40 \\
 & x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & \geq & 85 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Om slackvariabler x_4 och x_5 införs och problemet löses med simplexmetod fås optimaltablån nedan

basvar.	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde
$-z$	1	0	2	0	2	3	-335
x_1	0	1	-4	0	2	-1	5
x_3	0	0	5	1	-1	0	40

Antag att högerleden i de två bivillkoren ändras till 44 respektive 80. Finn optimum till det förändrade problemet med hjälp av reoptimering, dvs genom att utgå från optimaltablån ovan. Beräkna först hur förändringen av de ursprungliga högerleden fortplantar sig till tablån, och använd sedan en lämplig metod för att finna en ny optimaltablå.

65. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrl}
\min z = & -x_1 & + & x_2 & & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & 5x_2 & \geq & 10 & (1) \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 12 & (2) \\
 & 2x_1 & & & \leq & 3 & (3) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Besvara nedanstående frågor med hjälp av grafisk lösning.

a) Hur stort är skuggpriset för bivillkor (3) i optimum?

b) För vilka värden på högerledet i bivillkor (1) är skuggpriset för villkoret oförändrat i optimum.

c) För vilka värden på målfunktionskoefficienten framför variabeln x_1, erhålles samma optimallösning?

66. Då det linjära programmet

$$\begin{array}{rrcrcrl}
\max z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (1) \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 & (2) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

löses med simplexmetoden fås optimaltablån

basvar.	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	värde
$-z$	1	0	0	-3	-1	-27
x_1	0	1	0	-2	1	2
x_2	0	0	1	3	-1	3

där s_1 och s_2 är slackvariabler i bivillkoren (1) och (2).

a) Ge skuggpriset för bivillkoret (1) och dess giltighetsområde.

b) Utöka problemet med bivillkoret $4x_1 + 3x_2 \leq 16$. Finn samtliga optimallösningar till det utökade problemet genom att reoptimera utifrån tablån som är given ovan.

c) Antag att det ursprungliga problemet utökas med en variabel x_3 med $c_3 = 11$ och $a_3 = (2, 5)^T$. Finn samtliga optimallösningar till det utökade problemet genom att reoptimera utifrån ovanstående tablå.

67. Antag att följande problem har lösts med simplex-metoden:

$$\begin{array}{lrrcrcl}
\text{(P)} & \max z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & \text{då} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\
 & & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0,
\end{array}$$

och att följande optimaltablå har erhållits:

bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	värde
$-z$	1	0	0	0	-1	-2	-13
x_2	0	0	1	0	$1/2$	$1/2$	5
x_1	0	1	0	0	0	1	3
s_1	0	0	0	1	$-1/2$	$3/2$	3

a) Vad är skuggpriset för det andra bivillkoret? Hur mycket kan högerledet b_2 förändras för att skuggpriset fortfarande ska vara giltigt?

b) Antag att högerledet i det andra bivillkoret ändras från 7 till 15. Beräkna den resulterande förändringen i det optimala målfunktionsvärdet.

c) Utgå åter från det ursprungliga problemet och dess optimaltablå, och antag att en ny variabel, x_3, med bivillkorskoefficienter $(1, 1, 1)^T$ tillkommer. Hur stor måste dess målfunktionskoefficient vara för att det optimala målfunktionsvärdet skall blir högre än det ursprungliga (13)?

68. Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4$$
$$\text{då} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \geq 0, \end{cases}$$

vilket har unikt optimum i $x^* = (0, 2, 1, 0)^T$, med $z^* = 10$.

a) Teckna linjärprogrammeringsdualen och beräkna dess optimum.

b) Antag att koefficienten för variabeln x_1 i första villkoret (vilken har värdet 2) egentligen inte är känd med säkerhet. För vilka värden på denna koefficient fås samma primala optimum?

c) Antag att villkoret $x_4 \geq 0$ ersätts med $x_4 \geq \varepsilon$, där $\varepsilon > 0$. Hur förändras det optimala målfunktionsvärdet för små värden på ε? För hur stora värden på ε gäller ditt svar?

69. Ett företag tillverkar fyra olika sorters lådor av olika volym. Efterfrågan som måste uppfyllas och storlek på lådorna framgår av tabell 14. Den rörliga kostnaden för att tillverka en låda är lika med lådans volym. En fast kostnad på 1000 kr uppstår för respektive lådtyp om någon låda av den storleken tillverkas. Om företaget vill så kan man tillfredsställa efterfrågan av en viss lådtyp med en större låda. Formulera ett billigaste vägproblem för att minimera företagets kostnad för lådtillverkning.

Låda	1	2	3	4
Storlek (dm^3)	33	30	26	24
Efterfrågan	400	300	500	700

Tabell 14: Storlek och efterfrågan på lådor i uppgift 69.

70. (Nätverksmodell för ett produktions- och distributionsproblem.)

I ett produktions- och distributionssystem ingår två fabriker och två varuhus. Problemet är att bestämma ett minsta kostnadsprogram för två månader, inkluderande tillverkning och (eventuell) lagring vid tillverkningsställena samt transport till varuhusen. Tabellerna 15 och 16 presenterar relevanta data.

	Tillverkn.kostn. (tkr)		Kapacitet (st)		Lagerkostnad (tkr/mån, st)
Fabrik	Mån 1	Mån 2	Mån 1	Mån 2	
1	6	7	73	66	1
2	7	8	29	24	2

Tabell 15: Kostnader och kapaciteter för fabrikerna, uppgift 70.

Transp.kostn. (tkr/st)	Varuhus 1	Varuhus 2
Fabrik 1	1	0
Fabrik 2	2	4

	Efterfrågan (st)	
Varuhus	Mån 1	Mån 2
1	62	65
2	14	44

Tabell 16: Transportkostnader och efterfrågan, uppgift 70.

Formulera som ett nätverksproblem.

71. Ett företag har följande optimeringsproblem. Företaget har k st fabriker. Varje fabrik har en maximal produktionskapacitet på $s_i, i = 1, 2, ..., k$, enheter. Produktionskostnaden ges av den icke-separabla funktionen $g(y) = g(y_1, y_2, ..., y_k)$, där y_k = antal producerade enheter vid fabrik k. Det finns m st kunder, med efterfrågan $b_j, j = 1, 2, ..., m$, enheter. Att transportera en enhet vara från fabrik i till kund j kostar c_{ij} kronor.

Formulera företagets problem att bestämma produktionsnivån för varje fabrik och att till minsta totalkostnad tillgodose kundernas efterfråga. Ge också en enkel nätverksmodell för problemet.

72. (Projektplanering.)

För att planera storskaliga projekt (t ex byggnation av ett kärnkraftverk eller utveckling av en komplex datorprogramvara) används ofta så kallade *projektnätverk*. Syftet med detta kan till exempel vara att avgöra om projektet kan avslutas inom en viss tidsrymd, eller att bestämma vilka aktiviteter i projektet som är mest kritiska för förseningar (för att projektet som helhet inte skall försenas). Nedan ges ett enkelt exempel på en projektplaneringsfrågeställning.

Att bygga ett hus

Byggfirman *På Löpande Räkning AB* har åtagit sig en husbyggnation och vill nu veta om den i kontraktet angivna byggtiden räcker till. (På grund av påtaglig arbetsbrist var man mycket angelägen om att få kontraktet och hann därför inte göra en ordentlig analys av den erforderliga byggtiden innan kontraktet undertecknades.) Byggnationen består av följande aktiviteter, se tabell 17

	Aktivitet	Föregås av aktivitet	Tidsåtgång (dagar)
1.	Grävning av grund	–	2
2.	Gjutning av grund	1	4
3.	Resning av ytterväggar	2	10
4.	VA utvändigt	3	4
5.	VA invändigt	4	5
6.	Takläggning	3	6
7.	Dragning av el-ledningar	3	7
8.	Fasadbeklädnad	6	7
9.	Panel på innerväggar	5,7	8
10.	Utvändig målning	4,8	9
11.	Invändig målning	9	5
12.	Golvläggning	9	4
13.	Utrustning utvändigt	10	2
14.	Utrustning invändigt	11,12	6

Tabell 17: Aktiviteter till uppgift 72.

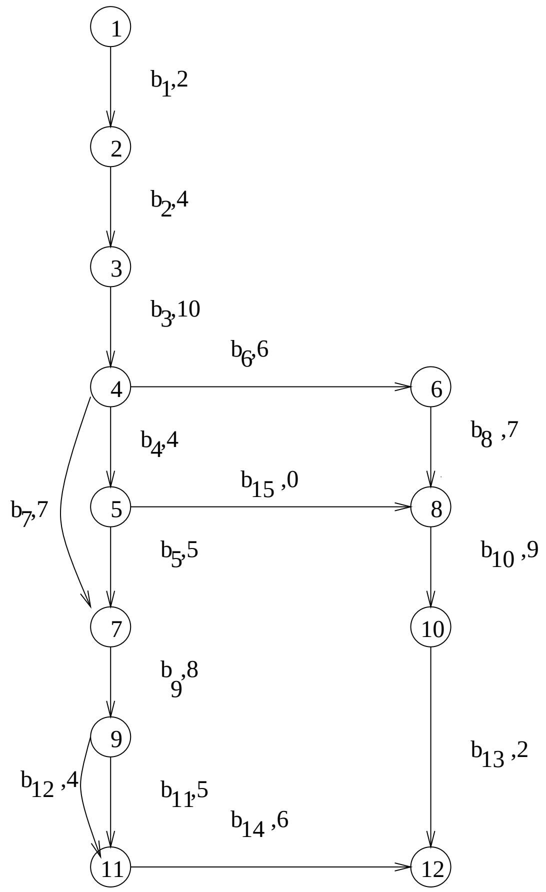
Detta byggprojektet kan beskrivas med nätverket i figur 2.

Bågarna b_1 till b_{14} representerar de ovan givna aktiviteterna, och varje nod representerar en övergång mellan på varandra följande aktiviteter. Noderna 1 och 12 representerar naturligtvis byggprojektets påbörjande respektive avslutande. Bågen b_{15} representerar en så kallad *blindaktivitet*, vilken införs för att säkerställa att aktivitet 10 inte påbörjas förrän aktiviteterna 4 och 8 *båda* är klara. På varje båge ges motsvarande aktivitets tidsåtgång. Observera att vissa aktiviteter kan pågå samtidigt; detta är till exempel fallet för aktiviteterna 10, 11 och 12.

a) Gör en topologisk sortering av noderna och använd en lämplig version av Bellmans ekvationer för att finna en *sekvens av på varandra följande aktiviteter*, från byggnationens start till dess slut, som har *störst sammanlagd tidsåtgång*, och som därför kommer att bestämma den totala byggtiden. (Sådana aktiviteter sägs vara *kritiska*.) Hur lång blir byggtiden? (Om man förutsätter att varje kritisk aktivitet påbörjas så snart det är möjligt.) Vilka aktiviteter är kritiska?

b) Den utvändiga målningen görs av en entreprenör som absolut vill påbörja arbetet så sent som det överhuvudtaget är möjligt. Vilken dag är det? (Givet att den i deluppgift a) beräknade byggtiden inte skall äventyras.)

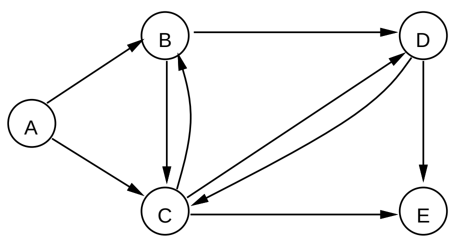
c) Ett nätverk som beskriver ett genomförbart projekt är alltid *acykliskt*; varför?



Figur 2: Nätverk till uppgift 72.

73. (Mest tillförlitliga väg.)

    Ett mycket viktigt telefonsamtal har beställts av en högt uppsatt person, och om samtalet bryts kommer det att få förödande konsekvenser för samtliga inblandade (även telefonbolaget). Eftersom samtalet är så viktigt har man på telefonbolaget TeleX beslutat att koppla upp det på ett så säkert sätt som möjligt. Personen i fråga befinner sig i staden A och samtalet har beställts till stad E. Förbindelser kan etableras enligt figur 3.



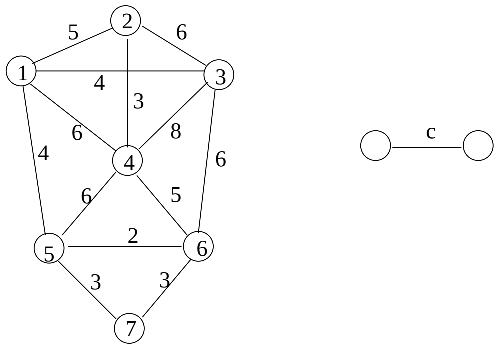
Figur 3: Nätverk till uppgift 73.

Sannolikheten för avbrott på teleförbindelserna är:

Förbindelse	Sannolikhet	Förbindelse	Sannolikhet
A $\to$ B	0,2	C $\to$ D	0,1
A $\to$ C	0,2	D $\to$ C	0,05
B $\to$ C	0,3	C $\to$ E	0,25
C $\to$ B	0,1	D $\to$ E	0,2
B $\to$ D	0,1		

Sannolikheten för avbrott på olika förbindelser är oberoende av varandra. Sök den uppkoppling från A till E som skall användas för att sannolikheten att samtalet ej avbryts skall vara så stor som möjligt.

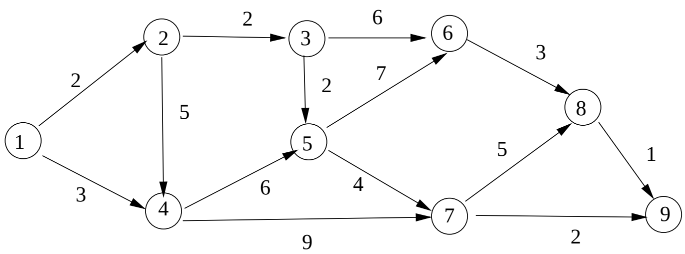
74. Finn ett billigaste uppspännande träd i grafen i figur 4.



Figur 4: Graf till uppgift 74.

75. (Väg av maximal kapacitet.)

Betrakta det riktade nätverk med *bågkapaciteter* som visas i figur 5.



Figur 5: Kapaciterat nätverk till uppgift 75.

a) Betrakta problemet att finna vägar av maximal kapacitet från nod 1 till alla andra noder. Formulera motsvarigheten till Bellmans ekvationer för detta problem. Vilken tolkning har i detta fall nodpriserna?

b) Använd en algoritm av Dijkstra-typ för att lösa problemet.

76. Problemet att i en graf $G = (N, A)$ finna en billigaste väg från nod 1 till nod m kan matematiskt formuleras på följande sätt.

Variabler: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om båge } (i,j) \in A \text{ ingår i billigaste vägen} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

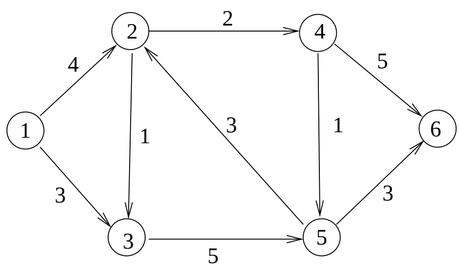
$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = 1 \\ -1 & \text{om } i = m \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad \forall i \in N$$

$$x_{ij} \geq 0$$

a) Härled Bellmans ekvationer. Vilken tolkning har de optimala nodpriserna?

b) Ge anslutningsmatrisen för nätverket i figur 6.



Figur 6: Nätverk till uppgift 76.

c) Använd Dijkstras algoritm för att finna en billigaste väg från nod 1 till nod 6.

d) Hur ändras den matematiska formuleringen av billigaste vägproblemet för nätverket i figur 6 ifall vi vill finna billigaste vägar från nod 1 till *alla* andra noder? Behöver vi ändra något i Dijkstras algoritm för att lösa ett sådant problem?

e) Antag att kostnaden för båge $(5, 2)$ ändras från 3 till -4. Då erhålls en negativ cykel, vilket medför att LP-problemet i b) har obegränsad lösning. Vad kan man då säga om motsvarande duala problem och dess lösning? Verifiera att svaret är sant genom att formulera och studera det duala problemet.

77. Antag att vi söker en väg från nod s till nod t i ett nätverk med bågkostnader. Vägen ska ha följande egenskaper:

1. Den ska bestå av så få bågar som möjligt.
2. Den ska vara billigast bland alla vägar med egenskapen 1.

Hur ska målfunktionen i LP-formuleringen av billigaste väg problemet se ut för att ge en lösning med dessa egenskaper.

78. Betrakta följande problem.

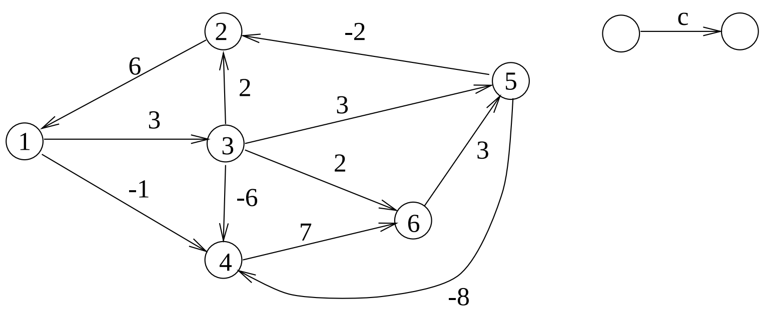
$$v_1^* = \max \; c^T x \quad Ax \le b \quad 0 \le x \le 1 \qquad\qquad v_2^* = \max \; c^T x \quad Ax \le b \quad x \ge 0$$

$$v_3^* = \max \; c^T x \quad Ax \le b \quad x \ge 0, \text{ heltal} \qquad\qquad v_4^* = \max \; c^T x \quad Ax \le b \quad x \in \{0,1\}$$

a) Vilka förhållanden gäller mellan de optimala målfunktionsvärdena v_1^*, v_2^*, v_3^* och v_4^*? (Det är ej säkert att det går att uttala sig om alla par.)

b) Som i a), men under antagandet att matrisen A är fullständigt unimodulär och att b är heltalig.

79. Betrakta den riktade grafen i figur 7.



Figur 7: Graf till uppgift 79.

a) Antag att vi vill finna billigaste vägar från nod 1 till alla andra noder. Formulera detta problem på LP-form.

b) Formulera, med generella beteckningar, Bellmans ekvationer för billigaste vägproblemet.

c) Verifiera att nodpriserna $(0,\ 4,\ 3,\ -3,\ 6,\ 4)^T$ uppfyller Bellmans ekvationer.

d) Vilka bågar ingår i ett billigaste vägträd?

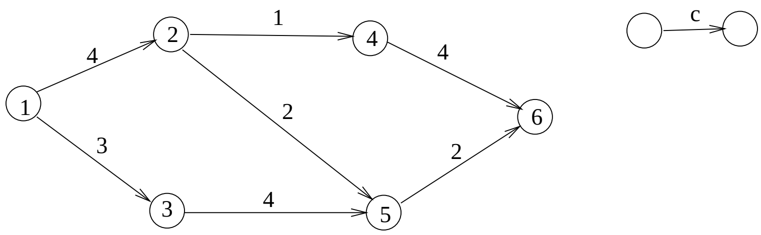
e) För vilka kostnader på båge (3,4) är detta träd optimalt?

80. Antag att vi söker en billigaste väg från nod 1 till nod 6 i nätverket i figur 8.

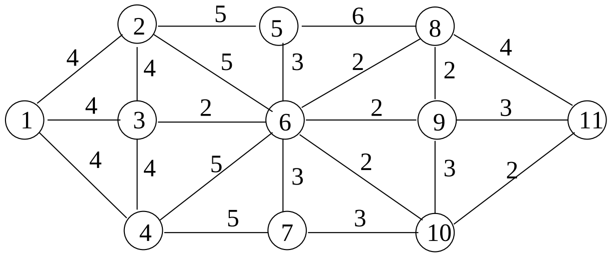
a) Visa mha Bellmans ekvationer att bågarna (1,2),(2,4) och (4,6) *inte* utgör en billigaste väg.

b) Lös problemet med en lämplig metod.

c) Varför finns det alltid alternativa optimala duala lösningar till ett billigaste vägproblem?



Figur 8: Nätverk till uppgift 80.

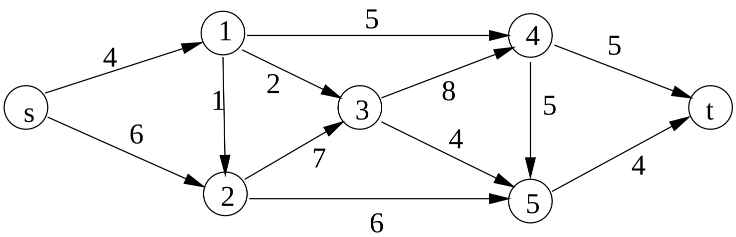


Figur 9: Graf till uppgift 81.

81. a) Finn ett billigaste uppspännande träd i grafen i figur 9.

b) Antag att en båge (i, j) som ingår i trädet, får nya kostnaden $c_{ij} + \delta$, där $\delta > 0$. Föreslå en reoptimeringsteknik som finner ett billigaste uppspännande träd för den nya situationen. Illustrera för grafen ovan, då c_{36} ändrar sitt värde från 2 till 6.

82. I nätverket i figur 10 sökes de billigaste vägarna från nod s till alla andra noder. Talen på bågarna anger bågkostnaderna.



Figur 10: Nätverk till uppgift 82.

a) Någon presenterar för oss ett träd innehållande bågarna $(s, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$ och $(4, t)$, och påstår att det löser det givna problemet. Utnyttja optimalitetsvillkoren för att visa att påståendet är falskt.

b) Generera algoritmiskt ett billigaste väg-träd som löser det givna problemet.

83. Den matematiska formuleringen av problemet att finna ett billigaste uppspännande träd i en graf $G = (N, A)$ där N är mängden av noder och A mängden av bågar, är följande:

$$\begin{aligned}
\min z = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{då} & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} & = & |N| - 1 & & (1)\\
& \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} & \leq & |S| - 1 \quad \forall S \subseteq N, |S| \geq 2 & & (2)\\
& x_{ij} & \in & \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A & &
\end{aligned}$$

där $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om båge } (i,j) \in A \text{ ingår i trädet} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

a) Förklara målfunktionens och de olika villkorens betydelse. Använd gärna förklarande illustrationer.

b) Denna formulering är svår att använda praktiskt; varför?

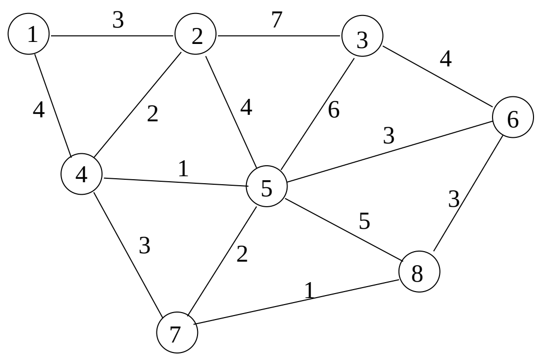
c) Villkoren (2) kan omformuleras till och ersättas av villkoren

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subseteq N, |S| \geq 2 \quad (3).$$

Förklara innebörden av dessa villkor.

d) Visa följande påstående: För varje partionering $\{N_1, N_2\}$ av N ingår den billigaste bågen över snittet (N_1, N_2) alltid i ett billigaste uppspännande träd.

e) Betrakta grafen i figur 11. Använd resultatet i uppgift d) för att finna ett billigaste uppspännande träd.



Figur 11: Graf till uppgift 83.

84. (Jämförelse av billigaste väg och billigaste uppspännande träd.)

a) Betrakta en riktad graf $G = (N, A)$ och avgör sanningshalten hos nedanstående påståenden. Motivera!

i) Om alla bågar i A har olika kostnader så finns ett unikt billigaste vägträd.

ii) Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så förändras inte en billigaste väg från s till t.

iii) Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så ändras den billigaste vägkostnaden med en multipel av k.

b) Betrakta en oriktad graf $G = (N, E)$ och avgör sanningshalten hos nedanstående påståenden. Motivera!

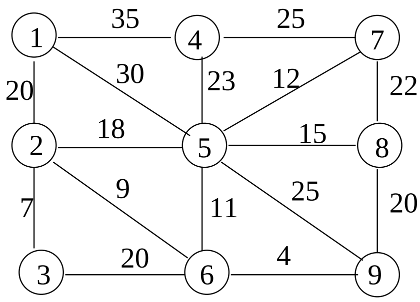
i) Om alla bågar i E har olika kostnader så finns det ett unikt billigaste uppspännande träd.

ii) Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så förändras inte ett billigaste uppspännande träd.

iii) Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så ändras kostnaden för det billigaste uppspännande trädet med en multipel av k.

85. (Reoptimering av billigaste uppspännande träd.)

Betrakta grafen i figur 12.



Figur 12: Graf till uppgift 85.

a) Finn ett billigaste uppspännande träd.

b) Antag att vi har bestämt ett billigaste uppspännande träd i en graf $G = (N, E)$. Redogör för hur man kan reoptimera trädet då följande förändringar uppkommer i grafen.

i) En båge $(i, j) \in E$ tas bort från grafen.

ii) En båge $(i, j) \notin E$ läggs till grafen.

86. Ett visst stålgrossistföretag säljer bl a stålbalkar av olika dimensioner. Då man får order på en balk av visst tvärsnitt och längd, så kapar man den normalt från en längre balk.

    Vid ett visst tillfälle har man för en viss tvärsnittsdimension inneliggande order om längder $l_j,\ j = 1, ..., N$. Dessa kan kapas ur långa balkar av längder $L_i,\ i = 1, ..., M$. Man vill nu placera in orderna på de långa balkarna, så att spillet från *utnyttjade* balkar blir minimalt. (Ej utnyttjade balkar räknas alltså inte in i spillet.)

    Formulera ett optimeringsproblem.

87. Den kände låtskrivaren och rockartisten Alfons Ask funderar på följande problem. Till hösten skall ett antal låtar från hans 6 skivor ges ut i form av ett samlingsalbum bestående av 2 CD-skivor. Varje CD-skiva får innehålla högst 1 timmes effektiv speltid. Alfons har poängsatt varje låt på de 6 skivorna, som vardera innehåller 10 låtar, och noterat deras speltid (i sekunder). För att hans utveckling som artist skall speglas i samlingen vill han att minst 2 låtar från varje skiva kommer med. Han vill förstås också att samlingens poängsumma skall vara så stor som möjligt.

    Formulera Alfons problem att välja låtar till samlingsalbumet som ett linjärt 0/1-problem. Inför själv nödvändiga beteckningar och definiera dem noga.

88. En basketbollcoach ska välja startuppställning (5 spelare) inför kvällens match. Hon har sju spelare att välja bland och hon har bedömt varje spelares förmåga i fyra viktiga spelmoment: passningar, skott, returer och försvar (1=dålig, 2=bra, 3=utmärkt). Dessa ges av tabell 18. Där anges också vilken position respektive spelare kan ha i laget (G=guard, F=forward, C=center).

    Startuppställningen måste uppfylla följande krav:

    – Minst 3 spelare måste kunna spela guard, minst 2 spelare måste kunna spela forward och minst en spelare måste kunna spela center.
    – Genomsnittlig förmåga i vardera av momenten passningar, skott och returer måste vara minst 2.
    – Om spelare nr 3 startar, så kan inte spelare 6 starta.
    – Om spelare nr 1 startar, så måste både spelare nr 4 och 5 starta.
    – Antingen startar spelare nr 2 eller så startar spelare nr 3.

    Coachen vill välja spelare så att försvarsförmågan i laget maximeras. Formulera coachens problem som ett heltalsproblem. Lös ej!

89. En mindre kommun i södra Sverige måste spara pengar och har beslutat att lägga ner en eller flera brandstationer. Idag finns stationer på 5 orter. Man beräknar att man sparar dubbelt så mycket på att lägga ner stationen i ort A eller ort C, jämfört med att lägga ner någon av stationerna i orterna B, D eller E. Säkerhetskraven säger att det måste finnas minst en station inom 15 min åktid från varje ort. I tabell 19 anges avstånden (i åktid) mellan de 5 orterna.

spelare	position	passningar	skott	returer	försvar
1	G	3	3	1	3
2	C	2	1	3	2
3	G,F	2	3	2	2
4	F,C	1	3	3	1
5	G,F	1	3	1	2
6	F,C	3	1	2	3
7	G,F	3	2	2	1

Tabell 18: Spelares förmåga, uppgift 88.

	Till				
Från	A	B	C	D	E
A	0	10	20	30	30
B	10	0	25	35	15
C	20	25	0	15	30
D	30	35	15	0	15
E	30	15	30	15	0

Tabell 19: Avstånd mellan orter i uppgift 89.

Vilken/vilka brandstationer ska läggas ned för att spara mest pengar? Formulera som ett linjärt heltalsproblem, lös ej.

90. Villaägare Linnea har tänkt bygga ett staket. Till detta behöver hon 90 st en-meters plankor och har därför åkt till trävarufirman Plank&Spik, vilken kan erbjuda 4 olika längder (1m, 2m, 4m och 5m). Kostnaderna (per längd) är 36:-, 70:-, 145:- respektive 170:-. Av längden 5m har man endast 15 st och dem säljer man antingen samtliga eller ingen alls. På övriga längder lämnar man mängdrabatt. För var tionde man köper av längd 4m får man en på köpet. Köper man minst 15 st av längd 1m lämnas en rabatt på 50:-, detsamma gäller för längden 2m. Om Linnea köper paketet med 5m-längder kan hon av transportskäl inte köpa några 4m-längder. Formulera en matematisk modell som beskriver Linneas problem att köpa in plankor till ett så lågt totalpris som möjligt.

91. Tre olika jobb ska passera tre olika maskiner. Varje jobb måste först passera maskin 1, därefter maskin 2 och slutligen maskin 3. Jobben kan dock tas i olika ordning vid varje maskin. Antag att t_{ij} betecknar processtiden för jobb i vid bearbetning i maskin j och att denna tid är given och heltalig för samtliga jobb och maskiner. Målet är att minimera den tid det tar att få alla jobb färdiga. Formulera som ett heltalsproblem. (Ledning: Låt x_{ij} beteckna starttiden för jobb i vid maskin j. Formuleringen måste förhindra lösningar där två jobb bearbetas samtidigt på en maskin, samt se till att ett jobb inte påbörjas i maskin $j + 1$ innan det har bearbetats i maskin j.)

92. Linus har i uppdrag att möblera lobbyn till ett stort hotell. Totalt skall det finnas minst 50 sittplatser i form av fåtöljer och soffor. En fåtölj (med en sittplats) kostar 3500 kr. Sofforna finns i tre varianter med 2, 3 och 4 sittplatser, och kostar 6000, 8000 respektive 10 000 kr styck. Minst 25 möbler skall köpas, och minst 10 stycken skall vara fåtöljer. För att möbleringen skall bli enhetlig vill man inte ha både 3-sits och 4-sitssoffor. Om fler än 15 fåtöljer köps får man 10 000 kr i rabatt, och om fler än 25 fåtöljer köps får man 5 stycken extra utan kostnad. Formulera problemet att möblera lobbyn till minimal kostnad som ett linjärt heltalsproblem.

93. I Montréal faller varje år stora mängder snö och för att förhindra trafikkaos måste snön köras bort. Snön lastas på lastbilar som sedan kör till någon avstjälpningsplats och tippar av snön. Staden är indelad i m st sektorer och all snö i sektor i körs till någon av n möjliga avstjälpningsplatser, där den sedan förvaras (smältningsprocessen antas inte komma igång förrän efter sista snöfallet). Avstjälpningsplats j kan ta emot V_j m^3 snö per år och det kostar f_j dollar per år att hålla plats j öppen (oberoende av snömängd). Snömängden i varje sektor uppskattas till v_i m^3 per år och kostnaden att transportera en kubikmeter snö från sektor i till avstjälpningsplats j är d_{ij} dollar. Vilka avstjälpningsplatser ska användas, och hur ska snön transporteras för att minimera kostnaderna? Formulera som ett heltalsproblem.

94. Överste Gyllenskalp skall planera en repövning. Mannar från tre regementen skall på billigaste sätt fördelas på tre övningsområden. På regementena A, B och C finns 600, 400 respektive 200 man. Övningsområdena 1, 2 och 3 kan maximalt ta emot 400, 400 respektive 600 man. Totalt 100 man skall dock stanna kvar på sina respektive regementen för att hålla beredskap. (Det finns inga krav på hur dessa 100 skall fördelas mellan regementena.) Översten antar att förflyttningskostnaderna (kr per man) ges av tabell 20.

till / från	1	2	3
A	5	4	5
B	9	7	8
C	7	6	6

Tabell 20: Förflyttningskostnader, uppgift 94.

Formulera problemet att på billigaste sätt fördela mannarna på övningsområdena.

95. a) Under en dag skall 5000 fungerande enheter av en diskret produkt tillverkas. Det finns fyra maskiner tillgängliga för att tillverka produkten, men produktionshastighet, produktionskostnad och andel defekta produkter varierar mellan dem. (Data ges i nedanstående tabell.) Formulera en linjär matematisk modell för problemet att finna en produktionsplan som (förväntat) uppfyller efterfrågan till lägsta kostnad.

Maskin	Uppstartnings-kostnad (kr)	Produktions-kostnad (kr/enhet)	Kapacitet (enheter)	Andel defekta produkter (%)
1	400	4	2000	10
2	1000	6	4000	5
3	600	2	1000	15
4	300	5	3000	8

b) Andelen defekta produkter från en maskin är naturligtvis inte känd med säkerhet, utan är bara ett medelvärde hos en stokastisk variation (som typiskt är approximativt normalfördelad). Om den verkliga felprocenten överstiger den förväntade, kan följden bli att efterfrågan inte kan tillgodoses, med förlorade kontrakt, stämningar, etc., som följd. Vi är alltså intresserade av att finna en produktionsplan som, så långt det är möjligt, lyckas tillgodose efterfrågan, dock fortfarande till en minimal kostnad.

Ge två olika modifieringar av modellen i deluppgift a), som vardera medger ett säkrare uppfyllande av efterfrågan (utan att kostnaden därför ökar astronomiskt).

96. (Modellering av ett schemaläggningsproblem.)

Sex kamrater, vilka tröttnat på det hårda studentlivet, har beslutat sig för att öppna ett café. Caféet skall ha öppet tisdag-söndag, och nu återstår problemet att fördela arbetsdagarna så att alla arbetar lika mycket. Bemanningen av caféet kräver att fyra personer arbetar samtidigt. Dock har endast två av kamraterna lyckats att lära sig att sköta den extremt komplicerade espressomaskinen (en manuell La Pavoni från 1921), som kräver en persons ständiga uppsikt. Man har kommit överens om att ingen skall behöva arbeta fler än fyra dagar i veckan.

För att fördela arbetsdagarna så gott det går enligt allas önskemål har man skapat ett system där var och en får poängsätta dagarna med tillsammans 100 poäng, där fler poäng representerar ett önskemål om att hellre arbeta den dagen. Om till exempel person A helst arbetar tisdag men helst inte onsdag och torsdag skulle denne kunna ge dagarna följande poäng:

Veckodag	Poäng
Tisdag	40
Onsdag	0
Torsdag	0
Fredag	20
Lördag	20
Söndag	20

a) Formulera problemet att lägga ett schema vilket maximerar kompanjonernas sammanlagda lycka (lycka definieras som antalet uppfyllda poäng) och samtidigt tillgodoser caféets krav på bemanning. Modellen skall vara ett linjärt heltalsproblem.

b) Antag att caféägarna bestämmer sig för att vara solidariska, och i stället som målsättning anger en maximal lycka hos den person som blir mest olycklig, för att på så vis balansera lyckan inom gruppen. Formulera om modellen från uppgift a) för att uppnå detta mål. Observera att den slutliga modellen fortfarande skall vara ett linjärt heltalsproblem.

97. (Relationer mellan ett heltalsproblem och dess LP-relaxering.)

    a) Vad menas med ett relaxerat problem?

    b) Avgör vilket eller vilka av följande påståenden om ett heltalsproblem (HP) och motsvarande LP-relaxerade problem (LP) som är sanna:

        i) Om LP har en tillåten lösning, så har HP också en tillåten lösning.

        ii) Optimala målfunktionsvärdet är i maximerings-fallet alltid strikt högre hos LP än hos HP.

        iii) Om HP har obegränsat optimum, så gäller detta även för LP.

        iv) Om HP har alternativa optimallösningar, så gäller detta även för LP.

98. (Formuering av logiska krav med binära variabler.)

    Förklara hur följande krav kan representeras som linjära bivillkor med hjälp av binära variabler (0/1-variabler). Samtliga ingående variabler är icke-negativa och mycket mindre än M.

    a) Minst ett av villkoren $x_1 + x_2 \leq 2$ och $2x_1 + 3x_2 \geq 8$ ska vara uppfyllt.

    b) Variabeln x_3 kan (endast) anta värdena 0, 5, 9 eller 12.

    c) Åtminstone två av följande fyra bivillkor ska vara uppfyllda.

$$\begin{array}{ccccc} x_4 & + & x_5 & \leq & 2 \\ x_4 & & & \leq & 1 \\ & & x_5 & \leq & 5 \\ x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \end{array}$$

99. Lös följande kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 11 \\ & x_j \in \{0,1\}, \forall j \end{array}$$

100. Lös följande kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{rl} \max & 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 \leq 8 \\ & x_j \in \{0,1\}, \forall j \end{array}$$

101. Betrakta följande binära kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{rccccccccc} \min z = & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \geq & 8 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1 \end{array}$$

a) Lös problemet med trädsökning. Använd djup-först-sökning och avsök alltid ett-grenen först.

b) Varje tillåten lösning uppfyller villkoret

$$x_3 + x_4 \geq 1.$$

Motivera varför så är fallet! Addera villkoret till kappsäcksproblemet och upprepa trädsökningen. Sökträdet blir nu mindre; *varför*?

[Ledning: LP-relaxationens optimum är nu (1, 2/5, 1, 0). De LP-problem som uppkommer i trädsökningen får lösas med inspektion.]

102. Lös följande heltalsproblem med trädsökning (Land-Doig-Dakins metod).

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max z = & 2x_1 & + & 4x_2 & & & \\ \text{då} & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \text{heltal} \end{array}$$

Sökstrategi: förgrena över variabel med störst fraktionell del, avsök "$\geq$-grenen" först och gör djup-först-sökning.

103. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max z = & 11x_1 & + & 6x_2 & & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 & (1) \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 7 & (2) \\ & \multicolumn{6}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \text{heltal.}} \end{array}$$

a) Lös problemet med trädsökning (Land-Doig-Dakins metod). Utnyttja att $x = (3, 0)^T$ är en tillåten lösning. Använd djup-först sökning, avsök "$\geq$-grenen" först och förgrena över variabel med störst fraktionell del.

b) Ange grafiskt det konvexa höljet till de tillåtna punkterna i problemet ovan. Vilka punkter måste man känna för att kunna beskriva det konvexa höljet matematiskt? Hur ser denna beskrivning ut?

c) Antag att endast ett av villkoren (1) och (2) behöver vara uppfyllt i optimum. Visa hur detta kan formuleras med linjära villkor och *en* 0/1-variabel.

104. Ett företag kan investera i fyra olika projekt. Investeringskostnaden (I) samt förväntad avkastning (A) anges i tabell 21 (i nuvärde, Mkr). Företaget har totalt 6 Mkr att investera. Vilka projekt ska företaget investera i? Formulera problemet som ett heltalsproblem och lös med trädsökningsmetodik.

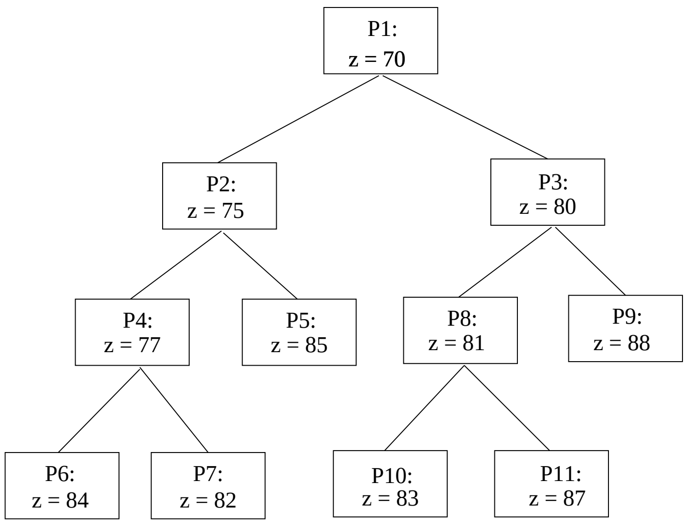
projekt	I	A
1	4	7
2	3	5
3	5	8
4	1	1

Tabell 21: Förväntad avkastning, uppgift 104.

105. Använd trädsökning (Land-Doig-Dakins metod) för att hitta en optimallösning till följande problem. Sökstrategi: avsök "$\geq$-grenen" först och gör djup-först-sökning.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max z = & 7x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & \\ \text{då} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 15 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & x_4 & \geq & 1 \\ & & & & & & & x_j & \geq & 0, \text{ heltal}, j = 1, ..., 4 \end{array}$$

106. Trädet i figur 13 illustrerar lösningen av ett heltalsproblem (minimering) med en trädsökningsalgoritm.



Figur 13: Sökträd till uppgift 106

Vid varje delproblem är angivet optimalt målfunktionsvärdet för det LP-relaxerade problemet. Numreringen av delproblemen anger ordningen i vilken de har lösts. Avsökning har gjorts enligt principen "välj delproblem med bästa (lägsta) optimistiska uppskattning". Utifrån detta delproblem har förgrening gjorts och därefter har de därigenom skapade delproblemen lösts. Lös följande deluppgifter och motivera noga dina svar.

a) Antag att sökträdet visar situationen då algoritmen *terminerat*. Vad är optimala målfunktionsvärdet?

b) Antag att algoritmen har *avbrutits* i det läge som sökträdet visar, och att endast delproblemen P5 och P11 har givit tillåtna heltaliga lösningar. Inom vilket intervall ligger optimala målfunktionsvärdet? Vid vilket delproblem ska nästa förgrening göras?

c) Antag att P4 hade givit en tillåten heltalig lösning. Hur många delproblem skulle man då ha behövt lösa totalt för att finna och verifiera optimum?

107. a) Lös problemet

$$\begin{array}{rrcrcl} \max z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0,\ \text{heltal} \end{array}$$

med trädsökning (Land-Doig-Dakins metod). Lös delproblemen grafiskt.

b) Ge de villkor som definierar det konvexa höljet, av de tillåtna lösningarna.

c) Omformulera problemet (mha lämpliga variabelsubstitutioner) till ett linjärt 0/1-problem.

108. Fem jobb ska utföras på en maskin. Uppsättningstiden för ett jobb beror på vilket jobb som utförs omedelbart före, enligt tabell 22.

före-	jobb				
gångare	1	2	3	4	5
ingen	4	5	8	9	4
1	–	7	12	10	9
2	6	–	10	14	11
3	10	11	–	12	10
4	7	8	15	–	7
5	12	9	8	16	–

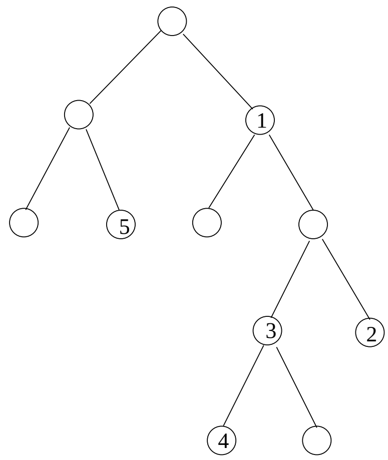
Tabell 22: Uppsättningstid, uppgift 108.

Målet är att bestämma i vilken sekvens jobben ska utföras så att total uppsättningstid minimeras. Designa en algoritm som bygger på trädsökningsmetodik och använd den för att lösa problemet.

109. Antag att trädet i figur 14 uppkommit vid lösning av ett heltalsproblem (minimering) med trädsökning (Land-Doig-Dakins metod).

Alla noder har avsökts. Fem subproblem är markerade och numreringen anger den ordning i vilken de har behandlats under lösningsgången. Låt z_j beteckna den optimistiska uppskattning av optimala målfunktionsvärdet som erhålls då subproblem j löses. Låt w_j beteckna den pessimistiska uppskattning av optimala målfunktionsvärdet som är tillgänglig när subproblem j har lösts.

a) Ange relationerna $(\geq, \leq, =)$ mellan z_1, z_2, z_3, z_4 och z_5.



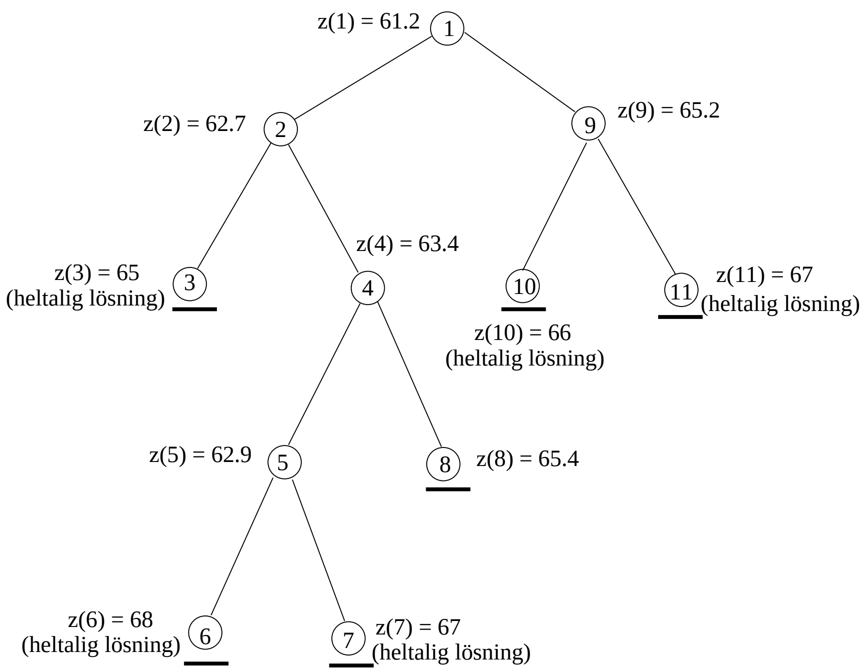
Figur 14: Träd till uppgift 109.

b) Ange relationerna ($\geq, \leq, =$) mellan w_1, w_2, w_3, w_4 och w_5.

c) Ange relationen ($\geq, \leq, =$) mellan z_4 och w_3. Motivera!

Observera att det inte säkert går att uttala sig om relationen i alla par av uppskattningar i deluppgifterna a) och b).

110. a) Kalle skall lösa ett heltalsproblem (minimering) med trädsökning och har genererat sökträdet i figur 15.



Figur 15: Sökträd till uppgift 110.

Vi antar att alla koefficienter i problemet är heltaliga. Noderna har undersökts i nummerordning och $z(\cdot)$ anger LP-relaxationens optimalvärde. Har Kalle gjort något fel vid lösningsförfarandet? Motivera!

b) Betrakta ett heltalsproblem (minimering) med optimalvärdet z^*. Antag att i en viss nod i ett sökträd som generats i en trädsökning har LP-relaxationen optimalvärdet z_{LP}. Kan man i nedanstående två fall avgöra om denna LP-lösning tillhör det konvexa höljet av de tillåtna lösningarna? Motivera.

   i) $z_{LP} < z^*$

   ii) $z_{LP} > z^*$

111. (Verifiering av optimalitet i heltalsproblem.)

Visa att $x^* = (2,2)^T$ är optimal i problemet

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 13 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1 \\
 & 6x_1 & - & 4x_2 & \leq & 15 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \text{ och heltaliga.}
\end{array}
$$

Använd en lösningsprincip som skulle kunna tillämpas även om problemet vore storskaligt.

112. Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
\min \text{ z} & = & 6x_1 & + & 8x_2 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 4 & \quad (1) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 & \quad (2) \\
 & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0,\ \text{heltal.} &
\end{array}
$$

Om vi löser LP-relaxationen till problemet erhålls följande optimaltablå (x_3 och x_4 är slackvariabler i villkor (1) respektive (2)).

Basvar	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	
$-z$	1	0	0	-4/5	-18/5	-88/5	
x_1	0	1	0	-2/5	1/5	4/5	(1)
x_2	0	0	1	1/5	-3/5	8/5	(2)

a) Tag fram Gomory-snitt från rad (1) och rad (2). Illustrera snitten grafiskt.

b) Ange villkor som definierar det konvexa höljet av de tillåtna heltalslösningarna.

c) Är villkoret $2x_1 + 3x_2 \geq 8$ ett giltigt snitt"?

113. Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\min z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{då} & 5x_1 & + & 4x_2 & \geq & 10 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0,\ \text{heltal,}
\end{array}
$$

vars LP-relaxation har följande optimaltablå:

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
$-z$	1	3/4	0	1/4	0	$-5/2$
x_2		5/4	1	$-1/4$	0	5/2
x_4		3/2	0	1/2	1	3

a) Illustrera grafiskt det konvexa höljet av heltalslösningarna, och ge en matematisk definition av det konvexa höljet.

b) Tag fram alla Gomory-snitt som är möjliga att generera från LP-relaxationens optimaltablå. Definierar något snitt en fasett?

c) Visa, med generella beteckningar, att ett Gomory-snitt alltid skär bort LP-optimum.

114. Antag att det tillåtna området i ett heltalsproblem definieras enligt

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 8 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0\ , \quad \text{heltal.} \end{array}$$

Tag fram ett Gomorysnitt. Är villkoret en fasett till det konvexa höljet?

115. (Chvátal-Gomory snitt)

a) Betrakta bivillkorssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ 5x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Illustrera grafiskt det tillåtna området. Konstruera också grafiskt det *konvexa höljet* av de *tillåtna heltalslösningarna.*

b) Gomory-snitt kan visas utgöra specialfall av så kallade Chvátal-Gomory olikheter, vilka definieras enligt följande.

Givet systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0, \end{array} \right.$$

där $A = (A_1, ..., A_n) \in R^{mxn}$ och $x \in R^n$, och ett $u \in R^m$ sådant att $u \geq 0$. Då sägs villkoret

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor u^T A_j \rfloor x_j \leq \lfloor u^T b \rfloor$$

vara en *Chvátal-Gomory olikhet.*

Betrakta samma numeriska exempel som i föregående deluppgift, dvs med

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Konstruera den Chvátal-Gomory olikhet som fås för värdet

$$u = \begin{pmatrix} 4/11 \\ 3/11 \end{pmatrix}.$$

Illustrera olikheten grafiskt i samma figur som ovan. Illustrera också (den svagare) olikheten

$$\sum_{j=1}^{n} \left(u^T A_j\right) x_j \leq u^T b.$$

(Denna olikhet benämns ofta *surrogatvillkor*. Notera att vektorn u här har valts med mycket stor omsorg för att den resulterande Chvátal-Gomory olikheten skall bli stark.)

c) Bevisa, för det generella fallet, att varje tillåten heltalslösning till systemet

$$\begin{cases} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0, \end{cases}$$

uppfyller Chvátal-Gomory olikheten.

[Ledning: Först visas att

$$Ax \leq b \text{ och } u \geq 0 \;\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(u^T A_j\right) x_j \leq u^T b.$$

Därefter utnyttjas att $x \geq 0$, och slutligen införs att x är heltalig.]

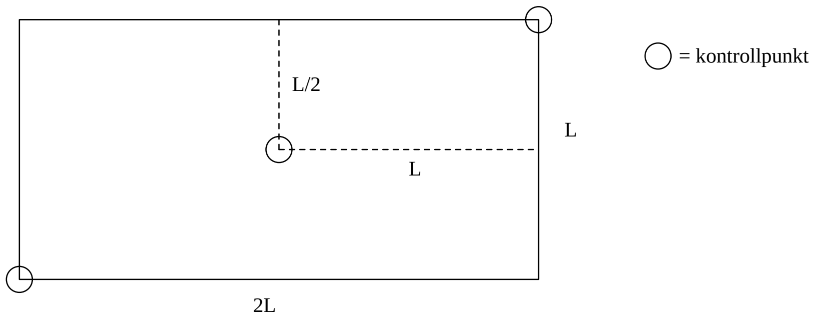
116. Ett företag vill anlita en optimerare för att göra en produktionsplan som minimerar kostnaderna för tillverkning och lagerhållning av två specialprodukter. Produktionsplanen skall tillgodose kundernas efterfrågan på 10, 12, 20 respektive 15 enheter av produkt 1 de fyra nästkommande veckorna, samt 20, 24, 40 respektive 30 enheter av produkt 2. I början av period ett finns 4 respektive 8 enheter i lager av de båda produkterna.

Tillverkningstiden är 0,9 timmar/enhet för produkt 1 och 0,8 timmar/enhet för produkt 2. Den tillgängliga kapaciteten i produktionsavdelningen är 40 timmar per vecka. Varje vecka finns det möjlighet att använda upp till 4 timmars övertid till en kostnad av 250 kr/timme. Tillverkningskostnaden varje vecka (i kr) är en funktion av den använda tillverkningstiden enligt:

$$100P + 600\left(\frac{P}{40}\right)^4$$

där P = total tillverkningstid i veckan för de båda produkterna.

Anledningen till detta utseende på kostnaden är att det uppstår trängsel och köer bland jobben i avdelningen när man närmar sig kapacitetsutnyttjandet 40 timmar. Lagerhållningskostnaderna är 15 respektive 14 kr per enhet och vecka. Formulera företagets optimeringsproblem.



Figur 16: Kontrollpunkterna i rummet i uppgift 117.

117. I ett rum skall två lampor placeras ut så att man får en intensitet på minst T (w/m^2) i tre kontrollpunkter (se figur 16). Varje lampa kan ha en effekt (watt) som är högst M (watt). Eftersom effekten kostar pengar (kostnaden är direkt proportionell mot effekten) vill man minimera effektåtgången (och därmed kostnaden). Intensiteten på avståndet l från en lampa kan beräknas mha formeln

$$P_{belysning} = \frac{k}{l^2} P_{lampa}$$

där k är en konstant och P_{lampa} effekten på lampan. Avståndet mellan en lampa och en kontrollpunkt ska vara större än $\epsilon > 0$. Intensiteterna från lamporna adderas till varandra.

Formulera problemet att under givna förutsättningar minimera totala kostnaden för att belysa rummet som ett optimeringsproblem. Är problemet konvext?

118. Lastalätt AB skall bestämma var man skall placera en ny lagerlokal. Positionerna (koordinaterna i km) för deras fyra kunder och antalet varusändningar per år till varje kund ges i tabell 23. Lastalätt AB vill placera lagret så att man minimerar det totala avståndet företagets lastbil måste köra från lagret till kunderna varje år. (För enkelhets skull räknar man med fågelvägsavstånd.)

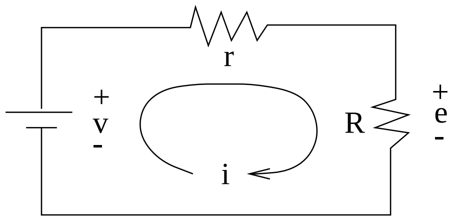
Kund	x-koordinat	y-koordinat	Antal sändningar
1	5	10	200
2	10	5	150
3	0	12	200
4	12	0	300

Tabell 23: Kunddata för Lastalätt AB, uppgift 118.

a) Formulera ett optimeringsproblem som finner den bästa placeringen.

b) Ett standardprogram ger lösningen att man skall placera lagret i punkten $x = 9,31$ och $y = 5,03$. Den totala tillryggalagda sträckan blir då 5456,54 km per år. Rita in denna placering tillsammans med kunderna geografiskt. Denna placering är ett lokalt optimum. Är den säkert även ett globalt optimum?

119. Kretsschemat i figur 17 beskriver en spänningskälla kopplad till en yttre last. Spänningskällan ger v Volt och har en inre resistans på r Ohm. Den yttre lasten är på R Ohm och spänningen över denna last betecknas med e. Strömmen i kretsen är i Ampere.



Figur 17: Kretsschema uppgift 119.

Notera att e och i beror av storleken på den yttre lasten, dvs av R.

a) Antag att vi vill finna det värde på R som maximerar effekten som utvecklas över den yttre lasten. Formulera detta problem som ett endimensionellt icke-linjärt program.

b) Gör en noggrann studie av målfunktionen och bestäm den optimala yttre lasten.

120. Då de årliga studentmästerskapen i gyttjebrottning skall anordnas så har det fallit på din lott att ansvara för leveransen av de 10 m^3 gyttja som behövs. På grund av din något begränsade budget har du beslutat dig för att anlita ett cykelbud för transport av gyttjan. Då cykelbudet inte har någon lämplig förvaringslåda för gyttjan måste du stå för byggkostnaden för en sådan. Budets kärra, på vilken lådan naturligtvis skall få plats, är 2 m lång och 1.5 m bred. Cyklisten vill inte frakta en låda som är högre än 1 m. Till lådans sidor och lock används ett byggnadsmaterial som kostar 10 kr/m^2. Tillgången på detta material är begränsad till 8 m^2. Till bottenplattan används ett speciellt material som kostar 25 kr/m^2. Dessutom säger cykelbudet att han inte hinner fler än 10 vändor, dvs lådan måste rymma minst 1 m^3 gyttja. För att inte få för hög tyngdpunkt skall höjden på lådan vara högst 1/10 av bottenplattans omkrets. Lådan behöver också förstärkas med ett krysstag som fästs på undersidan. Detta byggs av virke som du har 4 m av. (Lådans höjd påverkas försumbart av krysstaget.)

a) Formulera problemet att minimera byggkostnaden som ett icke-linjärt program.

b) Visa att den erhållna målfunktionen *inte* är konvex för samtliga icke-negativa variabelvärden.

121. Vi har 1 Mkr som kan investeras i två olika värdepapper. Genom noggranna studier av rörelser på börsen, utdelningar, framtidsutsikter mm har vi funnit att en satsad krona i respektive värdepapper kan förväntas vara värd 2 respektive 1,5 kr efter en viss tidsrymd. Denna uppskattning har en kovariansmatris Q. Vi kräver en minsta förväntad återbäring på 1,2 Mkr men investerar

i övrigt så att vi minimerar riskmomentet (variansen, mätt som $x^T Qx$). Formulera problemet som ett optimeringsproblem där

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

122. Vilka av följande funktioner är konvexa?

   a) $\ln(e^{x_1} + e^{x_2})$

   b) x_1^2/x_2 för $x_2 > 0$

   c) $-\sqrt{x_1 x_2}$ för $x_1, x_2 > 0$

123. För vilka värden på parametrarna a och b är nedanstående funktioner konvexa?

   a) $x_1^2 - 2x_1x_2 + ax_2^2$

   b) $x_1^b x_2^2$, för $x_1 > 0$

124. Vilka av följande funktioner är konvexa och vilka är konkava? (Det är inte säkert att varje funktion är någotdera!) Vilka är differentierbara?

   a) $f(x) = |x_1| + \dfrac{1}{x_2}$ för $x_2 > 0$

   b) $f(x) = x_1x_2$

   c) $f(x) = -2|x_1 - 1| + 5x_1 - 3x_2$

   d) $f(x) = \max\,(3x_1 + 2x_2 - 7, x_1 + 2x_2 - 5, x_1 - x_2 - 1)$

   e) $f(x) = \min\,(3x_1 + 2x_2 - 7, x_1 + 2x_2 - 5, x_1 - x_2 - 1)$

   f) $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (Ledning: triangelolikheten.)

125. Låt $f : I \to R$ vara en icke avtagande konvex funktion på intervallet $I \subseteq R$ och $g : C \to I$ en konvex funktion på den konvexa mängden $C \subseteq R^n$. Visa att den *komposita* funktionen $fg : C \to R$ är konvex på C. Använd resultatet för att visa att funktionen $x \to e^{x^2}$ är konvex på R.

126. Visa följande relation mellan aritmetiska och geometriska medelvärdet. För $x_i > 0$, $i = 1, .., n$, gäller

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

127. Betrakta problemet

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) \\ \text{då} & (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 2)^2 \leq 16 \\ & \qquad\qquad x_1^2 + x_2^2 \geq 8. \end{array}$$

a) Är mängden av tillåtna lösningar konvex?

b) För vilka differentierbara målfunktioner är punkten (2,2) ett lokalt maximum under de givna villkoren?

128. a) Avgör om mängden

$$X = \{(x_1, x_2) | 2e^{-x_1+x_2^2} \leq 4, -x_1^2 + 3x_1x_2 - 3x_2^2 \geq -1\}$$

är konvex.

b) Ge exempel på två mängder X_1 och X_2, där X_1 är konvex och X_2 icke-konvex, samt sådana att snittet av mängderna utgör en konvex mängd. Mängderna X_1 och X_2 ska anges matematiskt! Figur räcker ej!

129. a) Avgör om följande funktion är konvex.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 3x_1x_3 + e^{x_2+x_4} - x_2x_4$$

b) Visa att följande problem är konvext.

$$\begin{array}{lrcl} \min f(x) = & 4x_1^2 - 5x_2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + e^{x_1^2-2x_2} & & \\ \text{då} & -x_1^2 - 3x_2 & \geq & 3 \\ & 2x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2} & \leq & 4 \\ & -x_2 - x_3 & \leq & -2 \end{array}$$

130. a) För vilka värden på x_1 och x_2 är $f(x) = 3x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ konvex? För vilka värden på x_1 och x_2 är funktionen konkav?

b) Definierar villkoren $3x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \leq 5$, $x_1 \geq 1$ och $x_2 \geq 1$ en konvex mängd?

131. Är ett lokalt optimum till problemet nedan också ett globalt optimum?

$$\begin{array}{llcl} \min & f(x) = \dfrac{1}{x_1+1} + |3x_2 - 5| + 135x_3 & & \\ \text{då} & 2x_1^4 - 5x_1 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + 3x_2 - 10x_3 + 257x_4 & \leq & 13 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

132. Betrakta funktionen

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 10.$$

Avgör om $d = (2, -1)^T$ är en *descentriktning* i punkten $x = (1, 1)^T$.

133. En kontinuerligt deriverbar funktion $f(x_1, x_2)$ har lokalt maximum i origo under bivillkoren $x_1 - 2x_2 \geq 0$ och $3x_1 - x_2 \geq 0$. Ge samtliga möjliga gradienter till $f(x_1, x_2)$ i origo. Illustrera grafiskt!

134. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{llcrcl} \min & f(x_1,x_2) = (x_1-11)^2 + 4(x_2-6)^2 & & & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 17 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Teckna matematiskt de tillåtna riktningarna i (den tillåtna) punkten $\bar{x} = (8,1)^T$.

b) Teckna samtliga descent-riktningar i punkten $\bar{x}$.

c) Visa utifrån resultaten i deluppgifterna a) och b) att den studerade punkten inte är optimal. Ge en grafisk illustration av motiveringen.

d) Finn en brantaste tillåten descent-riktning i punkten $\bar{x}$. Illustrera resultatet grafiskt.

e) Studera nu istället punkten $\hat{x} = (6,5)^T$. Teckna de tillåtna riktningarna och samtliga descent-riktningar, samt visa att punkten $\hat{x}$ är ett lokalt minimum. Illustrera grafiskt. Är punkten $\hat{x}$ även ett globalt minimum? Varför (inte)?

135. Givet följande icke-linjära problem.

$$\begin{array}{rl} \min f(x) = & 2(x_1-5)^2 + (x_2-8)^2 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 19 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Finn alla *avtaganderiktningar* (descentriktningar) för målfunktionen f i punkten $\bar{x} = (3,4)^T$.

b) Finn alla *tillåtna riktningar* i punkten $\bar{x}$.

c) Utnyttja resultaten från ovanstående deluppgifter för att avgöra huruvida punkten $\bar{x}$ är ett lokalt minimum.

136. (Newton-Marquardt-riktningar.)

a) Givet det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2.$$

Beräkna Newton-riktningen i punkten $\bar{x} = (0, \frac{3}{4})^T$. Visa att riktningen *inte* ger descent för f.

[Ledning: Lösningen till det linjära ekvationssystemet

$$H(\bar{x})d = -\nabla f(\bar{x})$$

utgör Newton-riktningen.]

b) Genom att vid beräkningen av Newton-riktningen ersätta Hessianen $H(\bar{x})$ med $H(\bar{x}) + \nu I$, där I är enhetsmatrisen och $\nu > 0$ och tillräckligt stor, så fås en riktning (Newton-Marquardt-riktningen) som säkert ger descent för f (då $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$). Beräkna denna riktning för $\nu = 2$ och visa att den ger descent för f.

c) Visa för ett allmänt fall ($f \in C^2$) där Hessianen inte är positivt definit, att om ν är *strikt* större än absolutbeloppet av Hessianens minsta egenvärde så ger Newton-Marquardt-riktningen descent för f.

137. Angrip problemet

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 + 2x_2^2 - 8x_2$$

med

a) brantaste lutningsmetoden

b) Newtons metod

Starta i punkten $(0, 0)^T$ och utför högst två iterationer av vardera metoden. Är någon av de uppnådda punkterna optimal?

138. Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min f(x) = ax_1^2 + (a^2 - 1)x_2^3 + \frac{a}{2}x_2^2$$

a) Beräkna sökriktningarna i brantaste lutningsmetoden och Newtons metod, från punkten $(-1, -1)^T$, för $a = -1, 0$ och 1. Vilka av de beräknade riktningarna utgör en descentriktning?

b) För vilka värden på a ger Newtons metod ett globalt optimum på *en* iteration oberoende av startpunkt?

139. Betrakta problemet

$$\min f(x) = x_1^3 + x_1 x_2 + (1 + x_2)^2.$$

a) Bestäm sökriktningen för Newtons metod från punkten $\left(\frac{1}{2}, -1\right)^T$. Ge definitionen för en descent-riktning och visa att den beräknade Newton-riktningen uppfyller kravet för en sådan.

b) I vilka punkter i R^2 är Newton-riktningen inte väldefinierad?

140. Betrakta problemet

$$\max f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_3.$$

a) Visa att riktningen $d = (1, 0, 1)^T$ från punkten $x = (1, 1, 1)^T$ ger ascent.

b) Bestäm optimal steglängd.

141. Betrakta problemet

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + ax_2^2 - 4x_1 + 3x_2$$

a) För vilka värden på a är $f(x_1, x_2)$ en strikt konvex funktion?

b) Är riktningen $d = (1, 1)^T$ en descentriktning i punkten $x = (3, 0)^T$?

c) För vilket värde på a är brantastelutningsriktningen och Newtonriktningen parallella i punkten $x = (2, 1)^T$?

d) För vilka värden på a konvergerar Newtons sökmetod till globalt minimum på en iteration?

142. Kan optimum till problemet

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 5(x_2 + 6)^2$$

erhållas efter endast en iteration med brantaste lutningsmetoden, om man först utför en variabelsubstitution och därefter startar i en godtycklig punkt?

143. Härled sökriktningarna i brantaste lutningsmetoden och Newtons metod.

144. (Newtons metod för icke-linjära ekvationssystem.)

Antag att funktionen $F : R^n \to R^n$ är kontinuerligt differentierbar och betrakta det icke-linjära ekvationssystemet

$$F(x) = 0.$$

Newtons metod för obegränsad optimering har sin motsvarighet i en metod för lösning av detta problem. Givet ett iterat x^k görs i denna metod en linjärapproximation av den icke-linjära funktionen, vilket resulterar i ett approximerande *linjärt* ekvationssystem på formen

$$F(x^k) + \nabla F(x^k)(x - x^k) = 0,$$

eller ekvivalent

$$\nabla F(x^k)x = \nabla F(x^k)x^k - F(x^k),$$

där

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x)^T \\ \nabla F_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla F_n(x)^T \end{pmatrix}$$

är Jakobianen för funktionen F. Under förutsättning att Jakobianen i x^k är icke-singulär så har det linjära ekvationssystemet en entydig lösning, vilken utgör det nya iteratet, x^{k+1}, dvs

$$x^{k+1} = x^k - \nabla F(x^k)^{-1}F(x^k).$$

(Man kan visa att om funktionen F uppfyller vissa krav så kommer sekvensen av iterat att konvergera till en lösning till det ursprungliga ekvationssystemet.)

a) Betrakta det icke-linjära ekvationssystemet

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2)^3 + x_1 - 2x_2 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gör en iteration med den ovan beskrivna metoden från $x^0 = (1, 0)^T$. Beräkna värdet på

$$\|F(x_1, x_2)\| = \sqrt{F_1(x_1, x_2)^2 + F_2(x_1, x_2)^2}$$

i x^0 och x^1. (Observera att $\|F(x)\| = 0$ om och endast om $F(x) = 0$, varför värdena $\|F(x^k)\|, k = 1, 2, ...,$ kan användas som mått på iteratens kvalité.)

b) Förklara varför den ovan beskrivna metoden *generaliserar* Newtons metod för obegränsad optimering till en *större* problemklass.

145. Givet det obegränsade icke-linjära optimeringsproblemet

$$\min f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_1 x_2 - 2x_1 - 4x_2.$$

a) Beräkna den brantaste avtaganderiktningen i punkten $(1, 1)^T$.

b) Beräkna Newton-riktningen i samma punkt.

c) Visa att Newton-riktningen i $\bar{x}$ är en avtaganderiktning.

146. Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in \Re^n} f(x) = c^{\mathrm{T}} x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} C x,$$

där C är en symmetrisk och positivt definit matris. Härled en variabeltransformation som gör att *ett* steg i brantaste lutnings-metoden finner den unika optimallösningen oavsett val av startpunkt.

147. Lös problemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \min f(x) = & \multicolumn{5}{l}{2(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2} \\ \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

med Frank-Wolfe algoritmen. Starta i origo.

148. Givet problemet

$$\begin{array}{lrcl} \min f(x) = & \multicolumn{3}{l}{2x_1^2 + 4x_1 x_2 + 6x_2^3} \\ \text{då} & x_1 + 4x_2 & \leq & 7 \\ & x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Genomför en iteration med Frank-Wolfe metoden från punkten $(1, 1)^T$.

b) Jämfört med målfunktionsvärdet i punkten erhållen i a), hur mycket avviker det optimala målfunktionsvärdet högst?

149. Lös problemet

$$\begin{array}{rl} \min f(x) = & 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - 3x_2 \\ \text{då} & x_1 \geq 0 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1 \end{array}$$

med Frank-Wolfe metoden. Starta i origo och gör högst 2 iterationer.

150. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rl} \min f(x) = & (x_1 + 2x_2 - 6)^2 + (2x_1 - x_2 - 2)^2 \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1 \ , \ x_2 \geq 0. \end{array}$$

a) Visa att problemet är konvext.

b) Utför *en* iteration av en lämplig metod för problemet, med start i origo. Ange ett intervall inom vilket det optimala målfunktionsvärdet ligger.

151. Betrakta det konvexa problemet

$$\begin{array}{rl} f^* = \min f(x) = & \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{då} & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

och den icke-optimala tillåtna lösningen $\bar{x} = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})^T$. Beräkna på lämpligaste sätt en icke-trivial övre gräns för differensen $f(\bar{x}) - f^*$. (En övre gräns baserad på optimalvärdet för det obegränsade problemet betraktas här såsom varande trivial.)

152. Lös problemet

$$\begin{array}{rl} \min f(x) = & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{då} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 0 \end{array}$$

med Frank-Wolfe metoden. Starta i punkten $(3, 0)^T$.

153. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rl} \max f(x) = & 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \ , \ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Med start i $x^0 = (1/2, 1/2)^T$, lös problemet med Frank-Wolfe algoritmen. Ange i varje iteration ett intervall däri det optimala målfunktionsvärdet ligger. Varför är uppskattningarna giltiga för detta problem? (Högst tre iterationer åtgår.)

154. (En modifierad Frank-Wolfe algoritm.)

En svaghet hos Frank-Wolfe algoritmen är att varje sökriktning bestäms genom att en linjär approximation av (den icke-linjära) målfunktionen optimeras över *hela* det tillåtna området. Detta resulterar nämligen ofta i att linjäriseringen utnyttjas långt bort från approximationspunkten, det vill säga i områden där linjäriseringen typiskt utgör en dålig approximation av den riktiga målfunktionen. En konsekvens av detta är att Frank-Wolfe algoritmens sökriktningar kan ge mycket svag descent, vilket de också ofta gör i praktiken.

Ett sätt att åtgärda denna svaghet hos Frank-Wolfe algoritmen är att till det linjära problemet addera villkor som gör att ett optimum (till det modifierade problemet) inte ligger för långt från approximationspunkten. Om problemet

$$\begin{aligned} f^* = \max \quad & f(x) \\ \text{då} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

angrips med Frank-Wolfe algoritmen så ges det vanliga linjäriserade problemet av

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad \max \quad & f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) \\ \text{då} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

där x^k är en tillåten iterationspunkt, och den modifierade motsvarigheten kan till exempel ges av

$$\begin{aligned} \text{(RLP)} \quad \max \quad & f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) \\ \text{då} \quad & Ax \leq b \\ & \| x - x^k \|_\infty \leq \varepsilon \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

där $\varepsilon > 0$ är litet. Restriktionen $\| x - x^k \|_\infty \leq \varepsilon$ är ekvivalent med att $x_j^k - \varepsilon \leq x_j \leq x_j^k + \varepsilon$ skall gälla för alla j, och den beskriver alltså en hyperkub med centrum i x^k och med sida 2ε. Det modifierade problemet är därför också ett linjärt problem, men med uppåt och nedåt begränsade variabler. (Detta är lätthanterliga extravillkor, vilket är skälet till att vi använder en max-norm istället för en Euklidisk norm eller en ett-norm.) Notera att det modifierade problemet typiskt *inte* ger en optimistisk uppskattning av f^* (även om f är konkav.) Notera också att den maximala tillåtna steglängden (i algoritmens linjesökning) typiskt är större än ett.

Betrakta nu det numeriska exemplet

$$\begin{aligned} \max f(x) = \quad & 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ \text{då} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

och den tillåtna startlösningen $x^0 = (0,0)^T$.

a) Låt d^0 beteckna den sökriktning (från x^0) som fås med det vanliga riktningsbestämmande problemet i Frank-Wolfe algoritmen (dvs med LP). Beräkna $\nabla f(x^0)^T d^0 / \parallel d^0 \parallel_2$ (dvs riktningsderivatan av f i x^0 längs den normerade riktningen $d^0 / \parallel d^0 \parallel_2$).

b) Låt nu istället d^0 vara den sökriktning som fås med problemet RLP, och beräkna motsvarande storhet som i deluppgift a). Välj $\varepsilon = 1/10$. Jämför med resultatet i deluppgift a); vilken slutsats kan dras?

c) Tillämpa den ovan beskrivna modifierade Frank-Wolfe algoritmen på det numeriska exemplet. (Första sökriktningen beräknades i deluppgift b).) Exemplet behöver *inte* lösas till optimalitet; det räcker att beräkna nästa iterationspunkt (x^1) och den därpå följande sökriktningen (d^1). [Använd $\varepsilon = 1/10$ även i den andra iterationen.]

155. Betrakta följande problem

$$\begin{array}{rrcl} \min f(x_1, x_2) = & x_1^2 + 6x_2^2 + x_1 - 2x_2 & & \\ \text{då} & x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ & -2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Lös problemet med Frank-Wolfe metoden. Starta i punkten $x^0 = (3\ 1)^T$. (Högst 3 iterationer behövs.)

b) Visa att den funna punkten satisfierar Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

156. Låt $f : R^n \to R$ vara differentierbar och $A \in R^{m \times n}$. Antag att $\bar{x}$ är ett lokalt optimum till problemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax = b. \end{array}$$

Visa att det då finns $\lambda \in R^m$ sådant att $\nabla f(\bar{x}) + A^T \lambda = 0$.

157. Lös följande problem, där samtliga konstanter är reella och positiva.

$$\begin{array}{rrcll} \min & \sum_{j=1}^{n} x_j \ln x_j & & & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} b_j x_j & = & b_0 & \\ & x_j & > & 0 & j = 1, .., n. \end{array}$$

Global optimalitet skall motiveras.

158. Lös följande problem, där samtliga konstanter är reella och positiva.

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j & & & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} b_j / x_j & \leq & b_0 & \\ & x_j & > & 0 & j = 1, .., n. \end{array}$$

Motivera global optimalitet.

159. Givet följande icke-linjära optimeringsproblemet, där a är reell parameter.

$$\begin{array}{lrcl} \min & f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 & & \\ \text{då} & x^2 - ay & \leq & 0 \\ & x + y - 2 & \leq & 0 \end{array}$$

Finn med hjälp av Karush-Kuhn-Tucker teori de värden på a för vilka det första bivillkoret är uppfyllt med likhet i det globala optimat.

160. Betrakta problemet

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & cx_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & x_1 x_2 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\ & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 39 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

där c är en icke-negativ parameter.

a) För vilka värden på c är $(5/2\ 6)^T$ en Karush-Kuhn-Tucker punkt?

b) Avgör grafiskt för vilka värden på c som $(5/2\ 6)^T$ är optimal.

161. Betrakta det konvexa optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \min f(x) = & (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 11)^2 \\ \text{då } g_1(x) = & (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 13)^2 - 11^2 \leq 0 \\ g_2(x) = & x_1 + x_2 - 19 \leq 0. \end{array}$$

a) Teckna Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

b) Studera problemet grafiskt för att bestämma vilka bivillkor som är bindande (aktiva) i optimum. Utnyttja denna information och Karush-Kuhn-Tucker villkoren för att beräkna optimum.

162. Betrakta problemet

$$\begin{array}{lrcl} \min f(x) = & \sum_{j=1}^{n} x_j (c_j + x_j) & & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 & \leq & b \\ & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j & \geq & d. \end{array}$$

a) Formulera Karush-Kuhn-Tucker villkoren för problemet.

b) Låt $n = 3$, $c = (10, 2, -1)^T$, $a = (4, 2, 2)^T$, $b = 5$ och $d = 6$. Är någon av punkterna $(2, -1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$ och $(0, 1, 2)^T$ då ett globalt minimum?

163. Givet problemet

$$\begin{array}{rl} \min\ f(x_1, x_2) = & \frac{1}{2}x_1^2 - 10x_1x_2 + 10x_2^2 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1^2 - ax_2 \leq 2 \end{array}$$

a) Avgör för vilket/vilka värden på parametern a som punkten $x = (2, 1)^T$ uppfyller Karush-Kuhn-Tucker villkoren till problemet.

b) Är Karush-Kuhn-Tucker villkoren här tillräckliga för optimalitet?

164. Tag fram optimalitetsvillkoren för LP-problemet

$$\begin{array}{rrcl} \max z = & c^T x & & \\ \text{då} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

med hjälp av Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

165. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcl} \min f(x_1, x_2) = & (3x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2 - x_1 & & \\ \text{då} & x_1^3 + x_2^2 & \leq & 37 \\ & -4x_1 + x_2 & = & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Undersök om punkten $(1, 6)^T$ uppfyller Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

166. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcl} \min f(x_1, x_2) & = -x_1x_2 & & \\ \text{då} & x_1 + x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

a) Visa att punkten $(0, 0)^T$ satisfierar Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

b) Visa att denna punkt *inte* är lokalt minimum.

167. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1^3 & - & x_1 & + & 2x_2 \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & 4x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

och den tillåtna lösningen $\bar{x} = (1, 3)^T$.

a) Är $\bar{x}$ en Karush-Kuhn-Tucker punkt?

b) Är $\bar{x}$ ett globalt optimum?

168. a) En programvara för ickelinjär optimering har använts för att lösa problemet

$$\begin{array}{ll} \min & e^{x_1^2-2x_1} - ln(7x_2+1) \\ \text{då} & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 \leq 40 \\ & x_2 \geq 0, \end{array}$$

och funnit en punkt som den påstår är ett globalt minimum. Programvaran har dock ett dubiöst ursprung, varför vi vill kontrollera resultatet. En insättning i Karush-Kuhn-Tucker villkoren för problemet ger vid handen att dessa *är* uppfyllda. Detta räcker dock inte för att vi skall vara säkra på att den funna punkten verkligen är ett globalt minimum. Komplettera analysen med det som behövs ytterligare!

b) Programvaran påstår dessutom att den funna punkten är det enda globala minimat (dvs att problemet har *unikt optimum* i den funna punkten.) Utred huruvida det finns fog för detta påstående!

169. a) Visa att problemet

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^4 + x_2^4 + 12x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 3 \end{array}$$

har en Karush-Kuhn-Tucker punkt i $\bar{x} = (3,3)^T$.

b) Visa att $\bar{x}$ är *unikt* optimum. Motivera noga!

170. (Yttre straff ger relaxering.)

a) Betrakta ett problem på formen

$$\begin{array}{rl} f^* = \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, ..., m, \end{array}$$

där $x \in R^n$, och f och alla g_i är kontinuerliga på R^n. Låt $P : R^m \to R_+$ vara en *yttre straffunktion*, dvs en funktion sådan att

$$P(y) \begin{cases} = 0 & \text{då} \quad y = 0 \\ > 0 & \text{då} \quad y \neq 0, \end{cases}$$

och betrakta det straffade problemet

$$\Pi_\rho^* = \min_{x \in R^n} f(x) + \rho P(g(x)),$$

där $\rho > 0$. Visa att detta problem är en *relaxering* av det ursprungliga.

b) Utnyttja resultatet i deluppgift b) för att finna en icke-trivial undre gräns till

$$\begin{aligned} f^* = \min \quad & 2(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 = 1. \end{aligned}$$

Använd en kvadratisk straffunktion och $\rho = \frac{2}{3}$.

[Anmärkning: En omformulering medelst en yttre straffunktion ger naturligtvis en relaxering även i fallet då de straffade villkoren är av olikhetstyp.]

171. Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{(ILP)} \quad \min \quad & f(x) \\ \text{då} \quad & x \in X \end{aligned}$$

där mängden $X \subseteq R^n$ är icke-tom, sluten och konvex, och funktionen $f : R^n \to R$ är kontinuerligt differentierbar och konvex på X. Låt $x^* \in X$.

a) Visa att om x^* är en optimallösning till problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^*)^T x \\ \text{då} \quad & x \in X \end{aligned}$$

så gäller för alla $x \in X$ att

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0.$$

Visa vidare att detta resultat medför att x^* är en optimallösning till (ILP).

b) Illustrera resultatet på problemet

$$\begin{array}{lrcrcr} \min f(x) = & 2(x_1-3)^2 & + & (x_2-1)^2 & & \\ \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

c) Visa att om $X = R^n_+$ så reduceras det nödvändiga optimalitetsvillkoret i deluppgift a) till $\nabla f(x^*) \geq 0$ *och* $\nabla f(x^*)^T x^* = 0$.

d) Visa att då istället $X = \{x \in R^n | Ax = b\}$ så fås att x^* är optimal endast om $\nabla f(x^*)$ är ortogonal mot nollrummet till A.

172. Givet en konvex funktion f.

a) Ange mängden av alla descentriktningar till f i punkten $\bar{x}$.

b) Antag att d är en descentriktning till f i punkten $\bar{x}$. Är det då möjligt att avgöra om $\bar{d}$ är en ascentriktning eller descentriktning i punkten $\bar{x}$ utifrån att $d^T \bar{d} = 0$, dvs att d och $\bar{d}$ är vinkelräta mot varandra?

c) Antag att man vill söka optimum till problemet

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax \leq b. \end{array}$$

Antag vidare att man löst LP-problemet

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x + c_0 \\ \text{då} & Ax \leq b. \end{array}$$

Kan man utnyttja informationen ovan för att ta fram en övre gräns för det optimala målfunktionsvärdet till (P)? Hur kan man med ett lämpligt val av c och c_0 generera en undre gräns?

173. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcl} \min f(x_1, \ldots, x_n) = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{c_j} & & \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j & = & D \\ & x_j & \geq & 0 \quad j = 1, \ldots, n, \end{array}$$

där $c_j > 0, \quad \forall j$, och $D > 0$. Visa att optimallösningen och det optimala målfunktionsvärdet ges av

$$x_j^* = \frac{Dc_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \text{ och } \qquad f^* = \frac{D^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j}.$$

174. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rrl} f^* = \min & f(x) = & x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1 - 5x_2 \\ \text{då} & g(x) = & x_1^2 - x_2 - 1 \leq 0 \qquad (P) \\ & & 2 \geq x_1 \geq 1 \\ & & 1 \geq x_2 \geq \frac{1}{2}. \end{array}$$

a) Skapa ett linjärt optimeringsproblem som approximerar (P) genom att Taylor-utveckla funktionerna f och g i punkten $\bar{x} = (1, 1)^T$. Lös det linjära problemet grafiskt.

b) Vilken relation gäller mellan f^* och det linjära problemets optimalvärde? (Optimalvärdet f^* varken behöver eller skall beräkna!) Motivera noga varför den påstådda relationen gäller.

175. Betrakta optimeringsproblemet

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \end{array}$$

a) Teckna det Lagrange-relaxerade problemet.

b) Teckna det Lagrange-duala problemet (med dual målfunktion h).

c) Visa att $h(u) \leq f(x)$ gäller för alla u och x som är tillåtna lösningar i Lagrange-dualen respektive (P).

176. Bestäm lämpligt Lagrange-dualt problem till

$$\begin{array}{lrcll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ln x_{ij} & & & \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{i} x_{ij} & = & b_j & j = 1, ..., n \\ & \displaystyle\sum_{j} x_{ij} & = & a_i & i = 1, ..., m \\ & x_{ij} & \geq & 0. & \end{array}$$

177. (LP-dualitet som specialfall av Lagrange-dualitet.)

Använd Lagrange-dualitet för att härleda LP-dualen till det linjära problemet

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ \text{då} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

178. Lagrange-relaxera villkoret (1) i nedanstående problem och bestäm en optimallösning genom att formulera och lösa det Lagrange-duala problemet.

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \min & 6x_1^2 & + & 4x_2^2 & + & x_3^2 & & & \\ \text{då} & 24x_1 & + & 24x_2 & & & = & 360 & (1) \\ & & & & & x_3 & \geq & 1 & \end{array}$$

179. Betrakta problemet

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \min f(x) = & 2x_1^3 & + & \frac{1}{2}x_2^2 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & - 2 & = & 0 & & (1) \\ & x_1 & \geq & 1, & x_2 & \geq & 0. & & (2) \end{array}$$

Lagrange-relaxera bivillkor (1) med multiplikator λ. Formulera det Lagrange-duala problemet och bestäm den duala funktionens värde i punkterna $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$. Ange om möjligt ett intervall inom vilket det optimala målfunktionsvärdet ligger.

180. Använd Lagrange-dualitet för att lösa följande problem.

a)

$$\begin{array}{lrcrcl} \min f(x) = & x_1^2 & + & 3x_2^2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & f(x) = x_1^2 & + & 2x_2^2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 5 \end{array}$$

181. Givet problemet

$$\begin{array}{ll} \min \ f(x) = & 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 3x_2 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2 \geq 8 \qquad (1) \\ & 1 \leq x_1 \leq 3 \\ & 2 \leq x_2 \leq 5 \end{array}$$

Lagrange-relaxera villkoret (1) med multiplikator λ. Formulera det duala problemet och bestäm den duala funktionen för $\lambda = 1, 2$ och 3. Inom vilket intervall ligger f^*. Skissa den duala funktionen.

182. Givet det konvexa problemet

$$\begin{array}{ll} \min \ f(x) = & 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \\ \text{då} & 4x_1 + 2x_2 \geq 6. \end{array}$$

Finn ett optimum genom att formulera och lös det Lagrange-duala problemet.

183. Givet problemet

$$\begin{array}{ll} \min \ f(x) = & 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1 \\ \text{då} & 3x_1^2 - 2x_2 \leq 6. \end{array}$$

Teckna den Lagrange-duala funktionen och bestäm funktionens värde för multiplikatorvärdena 0 och 1. Inom vilket intervall ligger f^*?

184. Givet problemet

$$\begin{array}{ll} \min \ f(x) = & x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \\ \text{då} & 2x_1^2 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \quad (1) \\ & 0 \leq x_1 \leq 2, \quad x_2 \geq 1 \end{array}$$

Lagrange-relaxera villkor (1) med multiplikator λ och formulera det duala problemet. Bestäm den duala funktionens värde för $\lambda = 0, 1$ och 2. Inom vilket intervall ligger f^*?

185. Givet problemet

$$\begin{array}{lrcrcrcrcll} \min z = & -x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 6 & (1) \\ & 3x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 6 & \\ & -x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 2 & \\ & & & & & x_3 & - & x_4 & \leq & 2 & \\ & & & & & x_3 & + & x_4 & \leq & 3 & \\ & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4} & \geq & 0. & \end{array}$$

Lagrange-relaxera det övergripande villkoret (1) med multiplikatorn y. Formulera det Lagrange-duala problemet och bestäm den duala funktionens värde för $y = 2$. Det relaxerade problemet löses lättast grafiskt. Inom vilka gränser ligger det optimala målfunktionsvärdet för det givna problemet?

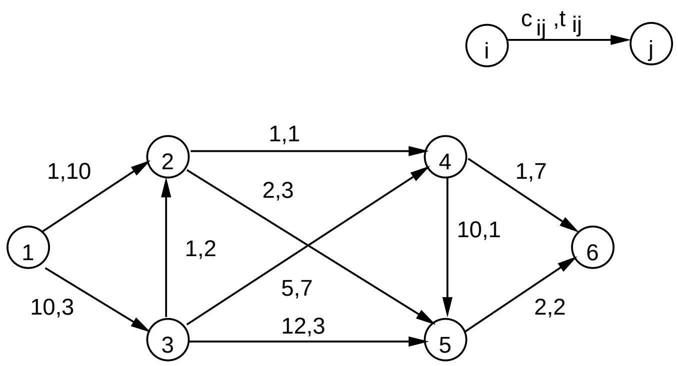
186. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrl} \min f(x) = & 2x_1^2 & - & 4x_1 & + & x_2^2 & +2x_2 \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 3. & \end{array}$$

Lagrange-relaxera båda villkoren och formulera det Lagrange-duala problemet. Beräkna de relaxerade lösningarna samt värdena av den duala funktionen för multiplikatorvärdena $(0,0)^T$ och $(1,1)^T$. Inom vilket intervall ligger f^*?

187. (Billigaste väg med sidovillkor.)

I nedanstående nätverk anges både kostnad c_{ij} och tid t_{ij} per flödesenhet för varje båge. Vi vill finna en väg från nod 1 till nod 6 som minimerar totalkostnaden givet att totaltiden inte får överstiga 14 tidsenheter.



Figur 18: Nätverk till uppgift 187.

a) Formulera problemet som ett heltalsproblem.

b) Lagrange-relaxera villkoret avseende totaltiden och formulera det Lagrange-duala problemet.

c) Bestäm den Lagrange-duala målfunktionens värde för multiplikatorvärdena $0, 1, 2$ och 3. Är något av värdena en optimal duallösning? Inom vilket intervall ligger det optimala primala målfunktionsvärdet?

188. Betrakta följande optimeringsmodell, vilken beskriver problemet att till lägsta kostnad skicka flöde av flera produkter genom ett nätverk.

$$\begin{array}{rrcll} \min z = & \sum_{k\in K} \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}^k x_{ij}^k & & & \\ \text{då} & Ax^k & = & d^k & k \in K \\ & \sum_{k\in K} x_{ij}^k & \leq & u_{ij} & (i,j) \in B \\ & x_{ij}^k & \geq & 0 & k \in K,\ (i,j) \in B \end{array}$$

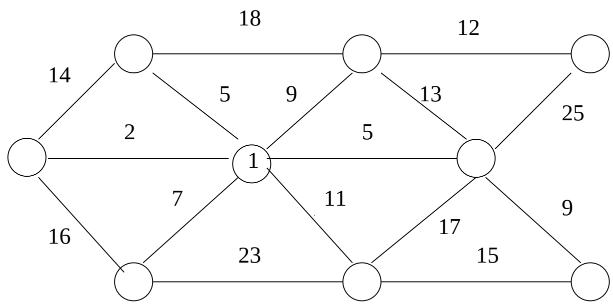
Här är:

K	$=$	mängden av produkter
B	$=$	mängden av bågar
A	$=$	anslutningsmatrisen för nätverket
x_{ij}^k	$=$	flöde av produkt k på båge (i,j)
x^k	$=$	vektor med alla bågflöden av produkt k
c_{ij}^k	$=$	kostnad per flödesenhet av produkt k på båge (i,j)
d^k	$=$	vektor med nodstyrkor (tillgång/efterfrågan) för produkt k
u_{ij}	$=$	kapacitet på båge (i,j).

Beskriv hur problemet kan angripas medelst Lagrange-relaxation. Hur ser det relaxerade problemet ut och hur löses det? Hur uppdateras multiplikatorerna?

189. (Minimalträd under sidovillkor.)

Vi vill i nätverket i figur 19 finna ett uppspännande träd sådant att valensen i nod 1 är högst tre och att kostnaden är minimal. (En nods valens ges av antalet anslutande bågar. Ett valenskrav av denna typ kan t ex uppkomma då noden svarar mot en teknisk utrustning med ett givet antal anslutningsmöjligheter.) Detta är uppenbarligen ett minimalträdsproblem under ett sidovillkor på valensen i nod 1, och kan med fördel angripas med Lagrange-relaxering av sidovillkoret.



Figur 19: Nätverk till uppgift 189.

a) Lagrange-relaxera sidovillkoret och teckna det Lagrange-duala problemet. Evaluera den duala målfunktionen för dualvariabelvärdena 0, 8 och 11. Ge de bästa möjliga uppskattningarna av det optimala målfunktionsvärdet för det ursprungliga problemet.

b) Visa att den Lagrange-duala målfunktionen för dualvariabelvärdet 9 har både en negativ och en positiv subgradient. (Observera att subgradienten här är *endimensionell*.) [Av resultatet följer naturligtvis att detta är ett Lagrange-dualt optimum.]

c) För minimalträdsproblem under sidovillkor uppträder typiskt ett (positivt) dual-gap, men för just det specialfall som studerats i deluppgift a) och b) finns inget dual-gap (dvs stark dualitet gäller). I detta fall går det alltså att använda de så kallade *globala optimalitetsvillkoren* för att bestämma ett primalt optimum utifrån ett Lagrange-dualt optimum. Finn på detta sätt ett uppspännande träd som är optimalt under den givna valensrestriktionen!

190. Det generaliserade tillordningsproblemet kan formuleras som

$$
\begin{array}{llcll}
\min z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} & \leq & b_i & i = 1,..,m \qquad (1)\\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & 1 & j = 1,..,n \qquad (2)\\
& x_{ij} & \in & \{0,1\} & i = 1,..,m; j = 1,..,n.
\end{array}
$$

Om problemet ska lösas genom att utnyttja Lagrange-relaxation kan antingen villkoren (1) eller (2) relaxeras. Formulera de relaxerade problemen i de båda fallen. Vilka problemtyper erhålls och hur löses de? Vilket Lagrange-dualt optimalvärde ger den starkaste optimistiska uppskattningen av det givna problemets optimalvärde?

191. (Lagrange-duala tillräckliga optimalitetsvillkor.)

Betrakta ett problem på formen

$$
\begin{array}{rl}
\min & f(x) \\
\text{då} & g(x) \leq 0 \\
& x \in X \subseteq R^n,
\end{array}
$$

där funktionerna $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$ är kontinuerliga och mängden X är sluten, och det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u)$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

det vill säga optimalvärdet för det problem som fås då de explicita villkoren $g(x) \leq 0$ Lagrange-relaxeras med multiplikatorer $u \geq 0$.

a) (Globala optimalitetsvillkoren medför primal optimalitet.) Det primala problemet kan angripas med en två-stegs procedur. Lös först det Lagrange-duala problemet. Låt u^* beteckna ett dualt optimum. Bestäm därefter, om möjligt, ett $x^* \in R^n$ vilket uppfyller de *globala optimalitetsvillkoren*, det vill säga med egenskaperna

$$
\begin{cases}
x^* \text{ löser } \displaystyle\min_{x \in X} f(x) + {u^*}^{\mathrm{T}} g(x) & (i) \\
{u^*}^{\mathrm{T}} g(x^*) = 0 & (ii) \\
g(x^*) \leq 0. & (iii)
\end{cases}
$$

Visa att ett sådant x^* löser det primala problemet. (Notera att det första villkoret implicerar att $x^* \in X$.)

[Anmärkning: De globala optimalitetsvillkoren innebär: (i) optimalitet i det Lagrange-relaxerade problemet, (ii) komplementaritet, och (iii) tillåtenhet.]

b) (Exempel.) Om det primala problemet är konvext (och har en optimallösning) så kan de tre villkoren ovan alltid uppfyllas, varför det primala problemet alltid kan lösas med den beskrivna proceduren. Använd den för att lösa det linjära (och därför konvexa) problemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \min\ z = & x_1 & - & 3x_2 & & \\ \text{då} & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Lagrange-dualisera det första bivillkoret.

c) (Ett specialfall.) Antag att det Lagrange-relaxerade problemet

$$\min_{x \in X} f(x) + {u^*}^{\mathrm{T}} g(x)$$

har ett *unikt* optimum, betecknat $x(u^*)$. Hur förenklas i detta fall det resultat som visades i deluppgift a)? Ge villkor på f, g och X som är tillräckliga för att det Lagrange-relaxerade problemet skall ha ett unikt optimum för *varje* $u \geq 0$, så att detta speciellt gäller även i (ett *a priori* okänt) optimum u^*.

[Anmärkning: Om $u^* \geq 0$ och $g(x^*) \leq 0$ så gäller att ${u^*}^{\mathrm{T}} g(x^*) = 0$ om och endast om $u_i^* g_i(x^*) = 0$ för $i = 1, \ldots, m$. De globala optimalitetsvillkoren kan alltså ekvivalent uttryckas som

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min\limits_{x \in X} f(x) + {u^*}^{\mathrm{T}} g(x) \\ u_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ g(x^*) \leq 0. \end{cases}$$

För att finna ett $x^* \in R^n$ som uppfyller de globala optimalitetsvillkoren, givet ett känt dualt optimum, u^*, är det vanligen lämpligast att utnyttja denna ekvivalenta form. Detta beror på att de separata komplementvillkoren $u_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, direkt ger information om vilka av villkoren $g_i(x) \leq 0$, $i = 1 \ldots, m$, som ett sökt x^* måste uppfylla med likhet; det aggregerade komplementvillkoret ${u^*}^{\mathrm{T}} g(x^*) = 0$ ensamt ger inte denna information.

Noteras kan också att om det ursprungliga problemet har formen

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0 \\ & x \in X \subseteq R^n, \end{array}$$

så reduceras de globala optimalitetsvillkoren till

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min\limits_{x \in X} f(x) + {u^*}^{\mathrm{T}} g(x) \\ g(x^*) = 0, \end{cases}$$

eftersom komplementvillkoren då alltid blir uppfyllda.]

192. (Primal-duala optimalitetsvillkor.)

Betrakta problemet

$$
(P) \qquad \begin{array}{rl} f^* = \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \quad | \quad u \geq 0 \\ & x \in X, \end{array}
$$

där $X \subset R^n$ är sluten och begränsad, och funktionerna $f : X \to R$ och $g : X \to R^m$ är kontinuerliga. Betrakta vidare det Lagrange-duala problemet

$$
(D) \qquad h^* = \max_{u \geq 0} h(u)
$$

där

$$
h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x).
$$

a) Visa *svag dualitet*, det vill säga att om $\bar{x}$ och $\bar{u}$ är tillåtna lösningar till respektive problem så gäller att $h(\bar{u}) \leq f(\bar{x})$.

b) Låt åter $\bar{x}$ och $\bar{u}$ vara tillåtna lösningar till respektive problem. Visa att om $h(\bar{u}) = f(\bar{x})$ gäller så är *både* $\bar{x}$ och $\bar{u}$ optimala, i respektive problem. Motivera noga!

c) Visa att om $\bar{x}$ och $\bar{u} \geq 0$ uppfyller de *globala optimalitetsvillkoren*, det vill säga om

$$
\begin{cases} \bar{x} \text{ löser } \min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^T g(x) \\ \bar{u}^T g(\bar{x}) = 0 \\ g(\bar{x}) \leq 0, \end{cases}
$$

så är *både* $\bar{x}$ och $\bar{u}$ optimala, i respektive problem.

[Anmärkning: En intressant slutsats av dessa resultat är att de globala optimalitetsvillkoren ger ett primalt optimum *endast om* $\bar{u}$ löser (D) och $h^* = f^*$, och att de annars saknar lösning. Det senare är alltså alltid fallet då $\bar{u}$ inte löser (D) *eller* då ett positivt dual-gap uppträder.]

193. (Numeriskt exempel på Lagrange-dualitet.)

Använd Lagrange-dualitet för att lösa det linjära problemet

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\max z = & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & \\
\text{då} & 2x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & - & x_4 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Lagrange-dualisera det övergripande bivillkoret och utnyttja det resulterande subproblemets separabilitet. (Ledning: Det räcker att studera den Lagrange-duala målfunktionen för dualvariabelvärden som är nära 1.)

194. (Numeriskt exempel på Lagrange-dualitet.)

Betrakta det konvexa problemet

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} \\
\text{då} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

a) Lagrange-relaxera det övergripande bivillkoret, teckna den resulterande *implicita* duala målfunktionen och det duala problemet. Motivera varför det relaxerade problemet alltid har ett unikt optimum, varigenom den duala målfunktionen är differentierbar överallt.

b) Lös det implicita Lagrange-duala problemet genom att utnyttja att gradienten till en differentierbar dual målfunktion kan uttryckas med de funktioner som ingår i de Lagrange-relaxerade villkoren och den unika lösningen till det relaxerade problemet.

c) Teckna nu istället ett *explicit* Lagrange-dualt problem (dvs ett dualt problem som är uttryckt i *endast* dualvariabeln). Lös det explicita duala problemet och bekräfta resultatet ovan.

d) Finn det primala problemets optimum.

e) Visa att stark dualitet gäller. *Varför* gäller den?

195. (Styckvis linjär Lagrange-dual målfunktion.)

Betrakta det primala problemet

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{då} \quad & g(x) \leq 0 \\
& x \in X,
\end{aligned}
$$

där $X \subseteq R^n$, $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$. Om restriktionerna $g(x) \leq 0$ utgör komplicerande sidovillkor vilka Lagrange-relaxeras fås det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x).$$

a) Antag att mängden X är ändlig (dvs att den består av ändligt många element; till exempel ett ändligt antal heltalspunkter). Beteckna elementen i X med x^p, $p = 1, \ldots, P$. Visa att den duala målfunktionen h då är styckvis linjär. Hur många linjära segment kan funktionen som mest vara uppbyggd av? Varför är den *inte alltid* uppbyggd av detta antal segment?

[Anmärkning: Notera att detta resultat gäller oavsett vilka egenskaper som funktionerna f och g har.]

b) Illustrera resultatet i deluppgift a) med hjälp av det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{rlrcrcrcrcl} z^* = & \max\ z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & \\ & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1, \end{array}$$

där det första villkoret betraktas såsom varande komplicerande.

c) Antag att funktionen f och alla komponentfunktioner i g är linjära, samt att mängden X är en polytop (dvs en begränsad mängd som kan beskrivas med ett ändligt antal linjära likhets- och olikhets-villkor). Visa att den duala målfunktionen även i detta fall är styckvis linjär. Hur många linjära segment kan funktionen som mest vara uppbyggd av?

196. (Lagrange-dualisering och konvexifiering.)

För problemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \subseteq R^n, \end{array}$$

där funktionerna $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$ är kontinuerliga och mängden X är sluten, gäller att om det finns ett $x^* \in R^n$ och ett $u^* \in R^m_+$ som uppfyller de *globala optimalitetsvillkoren*, det vill säga sådana att

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min\limits_{x \in X} f(x) + u^{*\mathrm{T}} g(x) \\ u^{*\mathrm{T}} g(x^*) = 0 \\ g(x^*) \leq 0, \end{cases}$$

så är x^* en optimallösning. (Notera att det första villkoret implicerar att $x^* \in X$.) För konvexa optimeringsproblem kan detta resultat användas för att finna en optimallösning genom att man först löser det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

för att finna u^*, varefter ett x^* kan beräknas.

a) (Icke-konvext exempel.) För icke-konvexa optimeringsproblem kan det ej garanteras att man finner en primal optimallösning med den ovan beskrivna duala strategin. Illustrera detta faktum med hjälp av problemet

$$\begin{array}{rrl} f^* = & \min & f(x) = -2x_1 + x_2 \\ & \text{då} & g(x) = x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & & (x_1, x_2) \in X = \{(0,0), (0,4), (4,4), (4,0), (1,2), (2,1)\}. \end{array}$$

Vilket eller vilka av de tre tillräckliga optimalitetsvillkoren kan ej uppfyllas? Beräkna dualitets-gapets storlek, det vill säga $f^* - h^*$, där h^* är det Lagrange-duala problemets optimalvärde.

b) (Konvexifierad version.) Betrakta problemet

$$\begin{aligned} f_c^* \;=\; \min \quad & f(x) = -2x_1 + x_2 \\ \text{då} \quad & g(x) = x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & (x_1, x_2) \in X^c = \{(x_1, x_2) |\ 4 \geq x_1 \geq 0,\ 4 \geq x_2 \geq 0\}, \end{aligned}$$

vilket är en *konvexifierad* version av problemet i deluppgift a). Lös problemet och beräkna f_c^*. Vilken relation gäller i detta exempel mellan optimalvärdena för det Lagrange-duala respektive det konvexifierade problemet (dvs mellan h^* och f_c^*).

[Anmärkning: Denna relationen kan visas vara allmängiltig.]

197. (Numeriskt exempel på Lagrange-heuristik.)

Betrakta det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{lllllllllll} z^* = & \max\ z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & \\ & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 6 & \quad (1) \\ & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 & \quad (2) \\ & & x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 & \\ & & & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 & \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1. & \end{array}$$

a) Lagrange-relaxera villkoren (1) och (2) med multiplikatorer $u_1, u_2 \geq 0$. Formulera det relaxerade problemet och motsvarande Lagrange-duala problem. Vilka egenskaper har det duala problemet?

b) Evaluera (beräkna värdet på) den Lagrange-duala målfunktionen för $u_1 = u_2 = 1$. Relatera det beräknade värdet till z^*.

c) Beräkna en subgradient till den Lagrange-duala målfunktionen i $u_1 = u_2 = 1$.

d) Finn en tillåten lösning till det ursprungliga problemet genom att på lämpligt sätt modifiera lösningen till det Lagrange-relaxerade problemet (med $u_1 = u_2 = 1$). Relatera det resulterande målfunktionsvärdet till z^*.

e) Hur uppdateras multiplikatorerna i subgradient-optimeringsmetoden? Hur kan resultatet i deluppgift d) utnyttjas vid beräkning av steglängden.

f) Vilken är relationen mellan det Lagrange-duala problemets optimalvärde och z^*? Förefaller det troligt att ett dualitets-gap uppträder? Varför (inte)?

g) Hur förhåller sig optimalvärdet för det Lagrange-duala problemet till optimalvärdet för den kontinuerliga relaxationen (linjärprogrammeringsrelaxationen) av det ursprungliga problemet? Motivera!

198. (Subgradienter och optimalitet för obegränsade Lagrange-dualer.)

Betrakta det primala problemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0 \\ & \quad x \in X \subseteq R^n, \end{array}$$

med $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$, samt det tillhörande Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \in R^m} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

det vill säga optimalvärdet för det Lagrange-relaxerade problemet. Antag att mängden X är kompakt och att funktionerna f och g är kontinuerliga på X. Den duala målfunktionen är då ändlig, konkav och kontinuerlig på det duala rummet, varför Lagrange-dualen är ett konvext problem.

a) Låt $\bar{u} \in R^m$ vara godtycklig. Definiera en subgradient, $\bar{\gamma}$, till h i $\bar{u}$. Definiera också subdifferentialen, $\partial h(\bar{u})$, till h i $\bar{u}$.

b) Låt $x(\bar{u})$ vara en lösning till problemet

$$\min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^{\mathrm{T}} g(x).$$

Visa att vektorn $g(x(\bar{u}))$ är en subgradient till h i $\bar{u}$.

c) Visa att om det för något $u = u^*$ gäller att $0 \in \partial h(u^*)$ så är u^* ett dualt optimum.

d) Illustrera detta resultat på det linjära problemet

$$\begin{array}{rrcrcl} \min\ z = & x_1 & - & 3x_2 & & \\ \text{då} & -x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

där det första villkoret anses vara komplicerande och därför Lagrange-dualiseras, med multiplikator u. I $u^* = 4/3$ finns alternativa lösningar till Lagrange-subproblemet, vilka ger upphov till alternativa subgradienter till den Lagrange-duala målfunktionen. Det finns speciellt exakt *två* extrema lösningar till Lagrange-subproblemet, och dessa ger upphov till två extrema subgradienter (dvs subgradienter som inte kan tecknas som icke-triviala konvexkombinationer av andra subgradienter); finn de extrema subgradienterna. Teckna subdifferentialen $\partial h(u^*)$. Verifiera att u^* är ett optimum till det duala problemet.

199. (Subgradienter och optimalitet för begränsade Lagrange-dualer.)

Betrakta det primala problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \\ & \quad x \in X, \end{array}$$

och det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

det vill säga optimalvärdet för det Lagrange-relaxerade problemet. Antag att mängden $X \subset R^n$ är kompakt och att funktionerna $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$ är kontinuerliga på X. Den duala målfunktionen är då ändlig, konkav och kontinuerlig på det duala rummet, varför Lagrange-dualen är ett konvext problem.

a) Låt $u^* \geq 0$. Visa att om det finns en subgradient γ^* till h i u^* som är komplementär till u^* (dvs ${u^*}^{\mathrm{T}}\gamma^* = 0$ gäller) och icke-positiv ($\gamma^* \leq 0$) så är u^* ett dualt optimum.

b) Betrakta det linjära problemet

$$\begin{array}{lrcrcrl} \min\ z = & x_1 & - & 3x_2 & & & \\ \text{då} & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 & \quad (1) \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -7 & \quad (2) \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, & \end{array}$$

där villkoren (1) och (2) anses vara komplicerande och därför Lagrange-dualiseras, med multiplikatorer u_1 och u_2. I punkten $u^* = (4/3, 0)$ finns exakt *två* extrema subgradienter till den Lagrange-duala målfunktionen; finn dessa. Teckna subdifferentialen $\partial h(u^*)$. Finn en subgradient, γ^*, till h i u^* som verifierar att denna punkt är ett optimum till det duala problemet.

Gör en grafisk illustration i R^2 innehållande u^*, det två extrema subgradienterna i u^*, $\partial h(u^*)$ och γ^*.

200. (Nytto-maximering under resursvillkor med Lagrange-dualitet.)

Många i praktiken förekommande optimeringsfrågeställningar består i så kallade resursallokeringsproblem. Följande problem utgör ett enkelt specialfall från denna klass av tillämpningar.

En resurs (till exempel pengar) varav det finns b enheter tillgängligt skall fördelas på n stycken aktiviteter (till exempel investeringar). Om aktivitet j tilldelas $x_j \geq 0$ enheter av resursen så ger aktiviteten upphov till nyttan (till exempel avkastningen) $f_j(x_j)$. För att allokera den totala tillgängliga resursen så att den resulterande totala nyttan maximeras löses optimeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \leq b \\ & \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Vi betraktar fallet då varje nyttofunktion f_j är två gånger kontinuerligt differentierbar.

Vi antar vidare att den marginella nyttan av att allokera ytterligare resurs till en aktivitet blir allt mindre som funktion av den resurs som redan tilldelats aktiviteten, det vill säga att varje aktivitets marginalnytta är avtagande. Detta innebär att $f_j''(x_j) < 0$ för alla $x_j \geq 0$ och att nyttofunktionen är strikt konkav. Optimeringsproblemet ovan blir därför konvext.

a) (Exempel.) Betrakta det numeriska exemplet

$$\begin{array}{ll} \max & ln(x_1+1) \ + \ 4ln(x_2+1) \ + \ 8ln(x_3+1) \\ \text{då} & x_1 \ + \ x_2 \ + \ x_3 \ \leq \ 4 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ \geq \ 0, \end{array}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{array}{ll} \min & ln\frac{1}{x_1+1} \ + \ 4ln\frac{1}{x_2+1} \ + \ 8ln\frac{1}{x_3+1} \\ \text{då} & x_1 \ + \ x_2 \ + \ x_3 \ \leq \ 4 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ \geq \ 0. \end{array}$$

Verifiera att den ursprungliga målfunktionen är strikt konkav. (Utnyttja att summan av strikt konkava funktioner är strikt konkav.) Betrakta det ekvivalenta problemet och Lagrange-relaxera villkoret på total tillgänglig resurs, med multiplikator u, och teckna det resulterande implicita duala problemet. Vilka egenskaper har den Lagrange-duala målfunktionen och det Lagrange-duala problemet? Vilka egenskaper hos det primala problemet ger upphov till dessa duala egenskaper?

Visa att det duala problemet löses av $u^* = 2$ och finn ett optimum till det primala problemet.

[Ledning: Utnyttja att derivatan av den duala målfunktionen kan tecknas med hjälp av funktionen i det relaxerade villkoret.]

b) (En egenskap hos optimum.) Betrakta det generella problemet och använd Lagrange-dualitet för att visa att den (unika) optimala resursallokering, x_j^*, $j = 1, \ldots, n$, karakteriseras av att de aktiviteter som tilldelas andelar av resursen, det vill säga de aktiviteter för vilka $x_j^* > 0$, har *samma marginalnytta*, och att ingen aktivitet som inte tilldelas någon resurs, det vill säga ingen aktivitet för vilken $x_j^* = 0$, har en marginalnytta som är högre än de förras. Vilken är marginalnyttan för de aktiviteter som tilldelas resurs?

(A.M. Geoffrion: "The purpose of mathematical programming is insight, not numbers.")

201. (Lagrange-dualitet och konvexifiering.)

Betrakta det primala problemet

$$\begin{array}{rcll} z^* & = & \min & z = c^{\mathrm{T}}x \\ & & \text{då} & Ax \geq b \\ & & & x \in X \subseteq R^n_+, \end{array}$$

där olikheterna $Ax \geq b$ är komplicerande sidovillkor, och dess Lagrange-dual

$$h^* = \max_{u \geq 0} h(u),$$

med

$$h(u) = \min_{x \in X} c^{\mathrm{T}}x + u^{\mathrm{T}}(b - Ax).$$

Antag att mängden X är ändlig, det vill säga att den består av ett ändligt antal element (till exempel heltalspunkter). Beteckna elementen i X med x^i, $i = 1, \ldots, P$.

a) Visa att det Lagrange-duala problemet kan formuleras som

$$\begin{array}{rl} h^* = \max & v \\ \text{då} & v \leq (b - Ax^i)^{\mathrm{T}}u + c^{\mathrm{T}}x^i, \quad i = 1, \ldots, P \\ & u \geq 0. \end{array}$$

b) Visa utgående från formuleringen i deluppgift a) att

$$\begin{array}{rcll} h^* & = & \min & \sum_{i=1}^{P} (c^{\mathrm{T}}x^i)\lambda_i \\ & & \text{då} & \sum_{i=1}^{P} (Ax^i)\lambda_i \geq b \\ & & & \sum_{i=1}^{P} \lambda_i = 1 \\ & & & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, P. \end{array}$$

c) Visa vidare, utgående från formuleringen i deluppgift b), att

$$\begin{array}{rcll} h^* & = & \min & z = c^{\mathrm{T}}x \\ & & \text{då} & Ax \geq b \\ & & & x \in X^c, \end{array}$$

där mängden X^c är det *konvexa höljet* av X, det vill säga mängden av alla möjliga konvexkombinationer av de P stycken elementen i X.

d) Vilken relation gäller mellan X och X^c? Hur förhåller sig z^* och h^*?

e) Betrakta det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl} z^* = & \max\ z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & \\ & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1, \end{array}$$

där det första villkoret anses komplicerande och därför Lagrange-dualiseras. Utnyttja problemet i deluppgift b) för att finna det Lagrange-duala optimalvärdet.

f) Gör nu det alternativa antagandet att mängden X är en polytop (en begränsad mängd som definieras av linjära villkor), med hörnpunkter x^i, $i = 1, \ldots, P$. (Det ursprungliga problemet är alltså ett linjärt program.) Motivera varför omskrivningarna ovan är giltiga även under detta antagande. Vilken relation gäller i detta fall mellan X och X^c? Hur förhåller sig nu z^* och h^*? Vad är i detta fall problemet i deluppgift b)?

[Anmärkning: Slutsatsen i deluppgift d) är grundläggande för användning av Lagrange-relaxering på heltalsproblem. Den brukar sammanfattas som att Lagrange-dualisering av en grupp av bivillkor är ekvivalent med att *konvexifiera* den mängd som definieras av de bivillkor som *inte* relaxeras. Problemen i deluppgifterna a) och b) kan i praktiken inte formuleras och lösas, eftersom antalet element i X, det vill säga P, normalt är mycket stort. Däremot kan problemet i deluppgift b) med fördel angripas med *kolumngenerering*.]

202. (Lagrange-relaxering kontra linjärprogrammeringsrelaxering.)

Antag att det linjära heltalsproblemet

$$\begin{array}{rll} z^* = \min & z = c^{\mathrm{T}}x & \\ \text{då} & Ax \geq b & \mid\ u \geq 0 \\ & Dx \geq e & \\ & x \geq 0 & \\ & x \text{ heltalig} & \end{array}$$

angrips med Lagrange-relaxering av bivillkoren $Ax \geq b$. Det relaxerade problemets optimala målfunktionsvärde ges då av

$$\begin{array}{rl} h(u) = \min & c^{\mathrm{T}}x + u^{\mathrm{T}}(b - Ax) \\ \text{då} & Dx \geq e \\ & x \geq 0 \\ & x \text{ heltalig,} \end{array}$$

och det Lagrange-duala problemet består i att söka

$$h^* = \max_u h(u).$$

a) Vad innebär det att det Lagrange-relaxerade problemet har *heltalsegenskap*? Ge exempel på relaxerade problem som har respektive *inte* har heltalsegenskap. Vilka sorts optimeringsmetoder används för att lösa relaxerade problem (av typen ovan) då de har respektive inte har heltalsegenskap? Vilken av dessa två problemtyper är (normalt) mest beräkningskrävande?

b) Betrakta heltalsproblemets linjärprogrammeringsrelaxation (kontinuerliga relaxation),

$$
\begin{aligned}
z_{LP}^* = \min \quad & z = c^{\mathrm{T}} x \\
\text{då} \quad & Ax \geq b \quad | \quad u \geq 0 \\
& Dx \geq e \quad | \quad v \geq 0 \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

och låt (u^*, v^*) beteckna ett dualt optimum.

Visa att den optimistiska uppskattning av heltalsproblemets optimalvärde som fås från det Lagrange-duala problemet optimalvärde alltid är minst lika stark som (dvs inte lägre än) den som fås från optimalvärdet för den kontinuerliga relaxationen (dvs visa att $z^* \geq h^* \geq z_{LP}^*$).

c) Visa att om det relaxerade problemet har heltalsegenskap så sammanfaller de två optimistiska uppskattningarna och dessutom är då u^* ett optimum till det Lagrange-duala problemet. Motivera också varför det Lagrange-duala problemet kan förväntas ge en starkare uppskattning än den kontinuerliga relaxationen om det relaxerade problemet *inte* har heltalsegenskap.

[Anmärkning: Av resultatet ovan följer att man kan använda Lagrange-relaxering och, till exempel, subgradientoptimering för att finna ett (approximativt) optimum till linjärprogrammeringsrelaxationen av ett linjärt heltalsproblem. Denna ansats är för vissa heltalsproblem, och speciellt för vissa 0/1-problem, effektivare än att använda en traditionell linjärprogrammeringsmetod (som, till exempel, simplexmetoden). Detta beror dels på att metoder som är baserade på Lagrange-relaxering i högre grad än linjärprogrammeringsmetoder kan utnyttja problemstrukturer (tex nätverksstrukturer), till exempel genom effektiv lagring och hantering av data, och dessutom bevara dem, genom att väsentligen bara ursprungliga problemdata används; dels beror det på att kontinuerliga relaxationer av 0/1-problem ofta är (kraftigt) degenererade, vilket sänker effektiviteten hos (den primala) simplexmetoden. (För övrigt har det observerats empiriskt att då simplexmetoder används för att lösa degenererade linjärprogrammeringsrelaxationer av 0/1-problem så är det ofta den *duala* simplexmetoden som är effektivast, eftersom den tycks störas mindre av primal degeneration än vad som är fallet för den primala metoden.)]

203. (En Lagrange-heuristik för det kapaciterade lokaliseringsproblemet.)

Betrakta det så kallade *kapaciterade lokaliseringsproblemet* formulerat som den blandade heltalsmodellen

$$
\begin{array}{rrcll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i y_i & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & S_i y_i, \quad i = 1,\dots,m & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & D_j, \quad j = 1,\dots,n & \qquad (*) \\
& y_i & = & 0/1, \quad i = 1,\dots,m & \\
& x_{ij} & \geq & 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n, &
\end{array}
$$

där variablerna y_i, $i = 1, \dots, m$, beskriver logiska beslut rörande lokalisering av källor, och x_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, är transportvariabler.

a) Visa att villkoret

$$\sum_{i=1}^{m} S_i y_i \geq \sum_{j=1}^{n} D_j$$

är en konsekvens av de ursprungliga villkoren (dvs att varje tillåten lösning måste uppfylla det nya villkoret), varför det kan adderas till modellen utan att denna påverkas.

b) Antag att vi adderar detta redundanta villkor och löser problemet heuristiskt med hjälp av Lagrange-relaxering av villkorsgruppen $(*)$ och subgradientoptimering. Beskriv lösningsgången! Vilka egenskaper har det duala problemet? Varför? Kan ett dualitets-gap förekomma?

c) För detta problem kan primalt tillåtna lösningar enkelt konstrueras utifrån Lagrange-subproblemlösningen i lokaliseringsvariablerna. Förklara hur!

d) Jämför styrkan på den undre gräns som fås från Lagrange-dualen med den som fås från den kontinuerliga relaxationen (linjärprogrammeringsrelaxationen) av problemet. Hur påverkas styrkan på den undre gränsen om villkoret ovan *inte* adderas? Motivera!

[Anmärkning: Notera att det adderade villkoret är redundant i den ursprungliga modellen, men att det *inte* är redundant i det *Lagrange-relaxerade* problemet. Denna uppgift illustrerar det faktum att det ofta är både möjligt och fördelaktigt att *stärka* en relaxering med hjälp av villkor som är redundanta i den ursprungliga modellen.]

204. (Surrogat-relaxering.)

Betrakta ett optimeringsproblem på formen

$$
\begin{aligned}
z^* = \ & \min \ f(x) \\
& \text{då } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \qquad (P) \\
& \qquad x \in X,
\end{aligned}
$$

där funktionerna $f, g_i : R^n \to R$ är kontinuerliga och mängden $X \subseteq R^n$ är sluten och begränsad. Problemet antas ha en tillåten lösning. Låt x^* vara en optimallösning. Introducera parametrar $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, och definiera

$$
\begin{aligned}
s(u) = \min \ & f(x) \\
\text{då } & \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \leq 0 \qquad (S) \\
& x \in X.
\end{aligned}
$$

Detta problem har alltså endast *ett* explicit bivillkor.

a) (Svag dualitet.) Visa att x^* är en tillåten lösning till problemet (S) och att $s(u) \leq z^*$ därför alltid gäller, det vill säga att problemet (S) är en *relaxation* av det ursprungliga. Motivera också varför $max_{u \geq 0} \ s(u) \leq z^*$ måste gälla. Förklara den potentiella nyttan av dessa resultat!

b) (Exempel.) Betrakta det linjära 0/1-problemet

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
z^* = & \max \ z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & & \\
& \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 6 & (1) \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 & (2) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 & \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1. &
\end{array}
$$

Surrogat-relaxera villkoren (1) och (2) med multiplikatorer $u_1, u_2 \geq 0$ och formulera problemet (S). Låt $\bar{u} = (1, 2)$. Beräkna $s(\bar{u})$.

Betrakta åter det ursprungliga problemet och Lagrange-relaxera villkoren (1) och (2) med multiplikatorer $u_1, u_2 \geq 0$. Beräkna det Lagrange-duala målfunktionsvärdet för $u = \bar{u}$.

Jämför de uppnådda resultaten.

c) (Jämförelse med Lagrange-dualitet.) Låt $u \geq 0$ och

$$
h(u) = \min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x).
$$

Visa att $h(u) \leq s(u)$, samt att

$$
\max_{u \geq 0} h(u) \leq \max_{u \geq 0} s(u) \leq z^*.
$$

205. (Satisfierbarhet med hjälp av heltalsoptimering.)

a) Låt a, b, c och d vara logiska variabler, det vill säga $a, b, c, d \in$ {sant, falskt}, och betrakta problemet att avgöra om det finns variabelvärden (sanningsvärden) sådana att den *konjunktiva normalformen*

$(a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg c) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg d)$

är *sann*. (Beteckningen $\vee$ betyder logiskt eller, $\wedge$ betyder logiskt och, medan $\neg$ betyder logisk negering. Detta är ett exempel på det så kallade *satisfierbarhetsproblemet*, vilket är viktigt inom teoretisk datalogi och som har tillämpningar inom t ex artificiell intelligens.)

Detta problem är ekvivalent med att avgöra om det finns en tillåten lösning till ett system på formen

$$\begin{cases} Ax & \geq b \\ x & \text{binär}, \end{cases}$$

där x är en vektor av lämplig storlek. Teckna A och b!

b) Antag att vi angriper ett *tillåtenhetsproblem* av den typ som tecknats i deluppgift a) med LP-baserad trädsökning. *Beskriv* hur detta specialfall av trädsökning utförs. Vilken typ av LP-problem löses, hur görs förgreningar, hur görs kapningar av grenar, när avbryts trädsökningen och var fås optimistiska och pessimistiska uppskattningar?

c) Antag att tillåtenhetsproblemet istället betraktas som 0/1-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & 0^T x \\ \text{då} & \begin{cases} Ax & \geq b \quad | \quad u \geq 0 \\ x & \text{binär} \end{cases} \end{array}$$

och angrips med Lagrange-relaxering (och t ex subgradientoptimering). Antag vidare att vi för någon multiplikatorvektor $\bar{u} \geq 0$ får att

$$h(\bar{u}) = \min_{x \text{ binär}} \bar{u}^T(b - Ax) > 0.$$

Vilken slutsats kan då dras för tillåtenhetsproblemet? Motivera noga!

206. Betrakta följande approximationsproblem. Givet är en mängd T i R^k, samt kontinuerliga funktioner f och f_j, $j = 1, ..., n$, på T, vill man approximera f så bra som möjligt med en linjärkombination av funktionerna f_j. Man vill alltså lösa optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \min_x \max_{t \in T} |f(t) - \sum_{j=1}^n x_j f_j(t)|,$$

där $x = (x_1, .., x_n)^T$. För numerisk lösning av (P) väljer man ut ett antal element, $t_1, ..., t_m$, i T och löser approximationen

$$(P') \qquad \min_x \max_{i=1,...,m} |f(t_i) - \sum_{j=1}^n x_j f_j(t_i)|.$$

a) Vilken slutsats om (P):s optimalvärde ger ett optimum till (P')?

b) Problemet (P') innehåller en inre maximering och en yttre minimering. Omformulera (P') till ett optimeringsproblem på traditionell form.

c) Teckna det duala problemet till det i b) erhållna problemet och förenkla detta så långt som möjligt.

d) Diskutera hur man kan använda kolumngenerering för att generera ytterligare ett element i T, säg t_{m+1}, som kan utnyttjas för att beräkna en förbättrad approximation. Tolka kolumngenereringen med anseende på problemet (P).

207. När man löser ett optimeringsproblem (manuellt) kan ett slarvfel leda till mer eller mindre allvarliga följdfel. Ett exempel på ett allvarligt följdfel är att man hamnar i en punkt som är otillåten i en metod som alltid kräver tillåtenhet. Avgör för vart och ett av nedanstående fall om felet *kan* leda till att en otillåten punkt uppnås. Motivera!

a) Felaktig steglängdsbestämning i brantastelutningsmetoden.

b) Fel val av inkommande variabel i simplexmetoden (fas II).

c) Fel val av utgående variabel i simplexmetoden (fas II).

d) Infört en slackvariabel i ett likhetsvillkor i ett LP-problem, vilket löses simplexmetoden.

e) Löst LP-problemet felaktigt i Frank-Wolfe metoden.

208. Avgör vilka av nedanstående påståenden som är sanna respektive falska.

a) Alla fas I problem har det optimala målfunktionsvärdet noll.

b) En Karush-Kuhn-Tucker punkt till ett konvext optimeringsproblem är alltid ett globalt optimum.

c) Antag att funktionen f är två gånger kontinuerligt differentierbar på R^n och låt G vara en symmetrisk och positivt definit matris av dimension $n \times n$. Då gäller att om $\nabla f(x) \neq 0$ och vektorn d uppfyller $Gd = -\nabla f(x)$ så är $f(x + td) < f(x)$ för tillräckligt små $t > 0$.

d) Den polyeder i R^5 som beskrivs av systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

har en extrempunkt i $(0, 0, 1, 0, 1)^T$.

e) Funktionen $f(x) = e^{-x^2/2}$ är konkav på intervallet $[-1, 1]$.

f) Om funktionen g är konkav på R^n och c är ett reellt tal så är mängden

$$\{x \in R^n \mid g(x) \leq c\}$$

konvex.

209. Besvara följande frågor kortfattat.

a) Vilka krav ställs på $g_i(x)$ och $f(x)$ för att säkert enbart *ett* lokalt optimum kan existera till problemet $\min f(x)$ då $g_i(x) \geq 0 \ \forall i$.

b) Beskriv Newton-Raphsons metod för endimensionell optimering. För- respektive nackdelar?

c) Varför är det så viktigt att avgöra om ett optimeringsproblem är konvext?

d) Formulera problemet att lösa det icke-linjära ekvationssystemet $a_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$ som ett optimeringsproblem.

e) Vad karaktäriserar en degenererad baslösning?

f) Hur identifieras obegränsat optimum i simplexmetoden. Motivera!

g) Ponera att ett primalt LP-problem har obegränsat optimum. Vad kan vi då säga om det duala problemet?

h) Definiera begreppet lokalt optimum.

i) Vad innebär cykling i ett LP-problem?

j) Formulera och tolka svaga dualsatsen.

k) Definiera begreppet konvex funktion.

l) Kommer brantaste lutningsmetoden att konvergera mot ett globalt optimum om tillräckligt många iterationer görs? Motivera!

210. Avgör om nedanstående påstående är rätt eller fel!

a) Icke-konvexa optimeringsproblem saknar alltid optimallösning.

b) Ett globalt optimum till ett icke-linjärt optimeringsproblem är alltid ett lokalt optimum.

c) Riktningen (-1,-1) är en descentriktning till funktionen $f(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 - x_2^2$, i punkten $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

d) Fas I-problemet i simplexmetoden har alltid begränsad optimallösning.

e) Det tillåtna området $Ax \leq b$, där A är en (4×5)-matris, x en (5×1)-vektor och b en (4×1)-vektor, kan som mest ha 126 baslösningar.

f) Givet ett primal-dualpar. Om det primala problemet har en begränsad optimallösning måste det duala problemet ha en tillåten lösning.

g) Du har löst problemet $\max c^T x$ då $Ax \leq b, x \geq 0$, och erhållit optimallösningen x^*. Genom att addera ytterligare ett bivillkor till problemet kan målfunktionsvärdet öka.

h) Givet problemet $\min f(x)$ då $Ax \leq b, x \geq 0$. Värdet $f(\bar{x})$ är en övre uppskattning till det optimala målfunktionsvärdet om $A\bar{x} \leq b, \bar{x} \geq 0$.

i) Givet ett antal konvexa mängder $X_i, i = 1, \ldots, n$. Då är mängden $X = \cap_{i=1}^n X_i$ alltid konvex.

j) För att Newtons metod skall vara tillämpbar och garanterat konvergera mot globalt optimum räcker det att funktionen är 2 gånger kontinuerligt differentierbar och att Hessianen är inverterbar.

k) Betrakta ett LP-problem som löses med simplexmetoden. Variabeln x_j har valts som inkommande. Minimala kvoten mellan koefficienterna i högerledet och positiva element i x_j-kolumnen ger värdet på x_j i nästa baslösning.

l) En fri variabel x_k kan ersättas med $x_k = x_k^+ - x_k^-$ där $x_k^+, x_k^- \geq 0$.

m) Om den artificiella målfunktionen i fas I ej kan drivas ned till 0, så har ursprungsproblemet obegränsad lösning.

n) Om problemet $\min f(x) = 2x_1^2 + 3(x_2+1)^2 + (x_3+2)^2$ löses med Newtons metod, så behövs högst en iteration.

o) Betrakta problemet $\min c^T x$ då $Ax = b, x \geq 0$, där A är en $m \times n$ matris, $n > m$. Om n-m variabler sätts till 0 kan resterande m variabler lösas ut för att erhålla en tillåten lösning.

p) Betrakta problemet $\min c^T x$ då $Ax = b, x \geq 0$, där A är en $m \times n$ matris, $n > m$. Om n-m variabler sätts till 0 kan resterande m variabler lösas ut för att erhålla en unik lösning.

q) Om man vid bestämmande av utgående variabel i simplexmetoden finner två olika variabler som uppfyller utgåendekriteriet, så kommer nästa baslösning att vara degenererad.

r) Antag att samtliga hörnpunkter till ett LP-problem är icke-degenererade. Innebär det att problemet har en unik optimallösning?

s) Om ett LP-problem har mer än en optimallösning så har det också oändligt många optimallösningar.

t) Om en variabel blir inkommande i en iteration med simplexmetoden så kommer den också att vara basisk i en optimallösning.

u) Det duala problemet är alltid ett maximeringsproblem.

211. Avgör om nedanstående påstående är rätt eller fel!

a) Dualen till ett fas I-problem har alltid en tillåten lösning.

b) Varje lokalt minimum till problemet $\min f(x)$ då $g_i(x) \geq b_i, i = 1, \ldots, m$, är också ett globalt minimum om målfunktionen är konvex och $g_i(x)$ är konkava, $\forall i$.

c) Ett globalt maximum till problemet $\max f(x)$ då $g_i(x) \geq b_i, i = 1, \ldots, m$, är också ett lokalt maximum endast då $f(x)$ är konkav och $g_i(x)$ är konkava, $\forall i$.

d) För problemet $\min f(x)$ då $g_i(x) \leq 0 \; i = 1, \ldots, m, x \geq 0$, där $x \in R^n$, gäller att den duala funktionen $\varphi(u) = \min_{x \geq 0} f(x) + u^T g(x), u \in R^m$, alltid ger en underskattning av det optimala målfunktionsvärdet då $u \geq 0$, d v s $\varphi(u) \leq f(x^*)$.

e) Om den optimala baslösningen till ett LP-problem är degenererad så har problemet oändligt många optimallösningar.

f) Om problemet $\min f(x) = 2x_1^4 + 3(x_2-3)^2 + (x_3+2)^2$ löses med Newtons modifierade metod, så behövs högst en iteration.

g) Varje LP-problem med begränsad icke-tom mängd av tillåtna lösningar har ändligt optimalvärde.

h) Ett globalt optimum till ett konvext problem är alltid unikt.

i) När Newton's metod används för att söka minimum till en funktion är de successiva sökriktningar som erhålls alltid ortogonala.

j) Ett problem som har obegränsat optimum kan vara konvext.

k) När alla element i kolumnen svarande mot den inkommande variabeln i primala simplexmetoden är mindre än eller lika med 0, så har problemet en obegränsad lösning längs en stråle som utgår från den aktuella baslösningen.

l) Ett konvext optimeringsproblem kan inte ha oändligt många Karush-Kuhn-Tucker-punkter.

m) Det tillåtna området till ett LP-problem kan vara icke-konvext.

Svar till uppgifterna

1. -
2. -
3. b), c), d), f) och g) konvexa
4. a) icke-konvex mängd (finn motexempel)
   b) icke-konvex mängd (finn motexempel)
   c) konvex mängd (bevisa)
   d) konvex mängd (bevisa)
5. $p \leq 0$ eller $p \geq 1$
6. Mängden behöver inte bli icke-konvex. Studera fallet $h(x) = \ln(x)$.
7. -
8. -
9. -
10. a) i) $X^* = X \cap \{x | f(x) \leq f^*\}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ konvex} \Rightarrow \{x|f(x) \leq f^*\} \text{ konvex} \\ X \text{ konvex} \end{array}\right\} \Rightarrow X^* \text{ konvex}$$

    ii) $$\left.\begin{array}{l} X^* \text{ konvex} \\ x^1,\ x^2 \in X^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X^*,\ \forall \lambda \in [0,\ 1]$$

    $x^1 \neq x^2 \Rightarrow$ oändligt många optima.

    b) $\max x_1^2 + x_2^2$ då $x_1 + x_2 \leq 1$ och $x_1,\ x_2 \geq 0$.
11. a) Visa att en konvex funktion har konvexa nivåmängder.
    b) $f(x) = -e^{-x^2}$
12. -
13. -
14. -
15. a) Summan av konvexa funktioner är konvex. Alltså konvext problem.
    b) Subtraktion av en konvex funktion är likvärdigt med att addera en konkav funktion. Summan av en konvex funktion och en konkav kan bli icke-konvex. Alltså ej säkert konvext problem.
    c) En linjär funktion är konkav (och konvex), och subtraktion av en sådan svarar alltså mot addition av en konvex funktion. Alltså konvext.
    d) Ej konvext.
    e) Variabeln kan tas bort från problemet, alltså fortfarande konvext.

f) Då funktionen g är konvex så beskriver villkoret $g(x) \leq 0$ en konvex mängd. Snittet av denna och den konvexa mängden X är konvex, alltså konvext problem.

g) Ej konvext. Med tex $g(x) = x^2 + y^2 - 4$ fås villkoret $x^2 + y^2 = 4$, vilket beskriver randen på en cirkel, vilket inte är konvex mängd.

16. x_P^* optimal till (P) $\Rightarrow x_P^* \in S$

$$f^* = f(x_P^*) \geq l(x_P^*) \geq \min_{x \in G} l(x) = l(x_P^*) = l^*$$

17. -

18. Variabeldefinition:

$x_j =$ antal praktikanter som utbildas månad j, $j = 1, \ldots, 5$

$y_j =$ antal tekniker som finns tillgängliga i början av månad j, $j = 1, \ldots, 5$

$$\begin{array}{rrcrcr}
\min z = & \multicolumn{5}{l}{\displaystyle\sum_{j=1}^{5}(15000y_j + 7500x_j)} \\
\text{då} & 160y_1 & - & 50x_1 & \geq & 6000 \\
 & 160y_2 & - & 50x_2 & \geq & 7000 \\
 & 160y_3 & - & 50x_3 & \geq & 8000 \\
 & 160y_4 & - & 50x_4 & \geq & 9500 \\
 & 160y_5 & - & 50x_5 & \geq & 11500 \\
 & 0.95y_1 & + & x_1 & = & y_2 \\
 & 0.95y_2 & + & x_2 & = & y_3 \\
 & 0.95y_3 & + & x_3 & = & y_4 \\
 & 0.95y_4 & + & x_4 & = & y_5 \\
 & & & y_1 & = & 50 \\
 & \multicolumn{5}{l}{y_j, x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5}
\end{array}$$

19. Variabeldefinition:

$y_i =$ antal inköpta kalkoner av typ i, $i = 1, 2$

$x_{ij} =$ mängd (hg) av köttyp i i kotlett j, $j = 1, 2$

($i = 1 \rightarrow$ ljust kött, $i = 2 \rightarrow$ mörkt kött)

$$\begin{array}{rrcr}
\max z = & \multicolumn{3}{l}{16(x_{11} + x_{21}) + 12(x_{12} + x_{22}) - 40y_1 - 32y_2} \\
\text{då} & x_{11} + x_{21} & \leq & 150 \\
 & x_{12} + x_{22} & \leq & 90 \\
 & x_{11} + x_{12} - 5y_1 - 3y_2 & \leq & 0 \\
 & x_{21} + x_{22} - 2y_1 - 3y_2 & \leq & 0 \\
 & 0.3x_{11} - 0.7x_{21} & \geq & 0 \\
 & 0.4x_{12} - 0.6x_{22} & \geq & 0 \\
 & x_{ij}, y_i & \geq & 0
\end{array}$$

20. Variabeldefinition:

$x_{ij} =$ antal ton av råvara i som används i bensinsort j, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
\min z = \; & \sum_{j=1}^{2} (1500x_{1j} + 2400x_{2j} + 3000x_{3j}) \\
\text{då} \quad & \begin{array}{rcr}
x_{11} + x_{12} & \leq & 12 \\
x_{21} + x_{22} & \leq & 15 \\
x_{31} + x_{32} & \leq & 25 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 10 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 25 \\
\frac{1}{10}(120x_{11} + 75x_{21} + 100x_{31}) & \geq & 90 \\
\frac{1}{25}(120x_{12} + 75x_{22} + 100x_{32}) & \geq & 95 \\
\frac{1}{10}(60x_{11} + 4x_{21} + 2,6x_{31}) & \leq & 10 \\
\frac{1}{25}(60x_{12} + 4x_{22} + 2,6x_{32}) & \leq & 8 \\
x_{ij} & \geq & 0
\end{array}
\end{aligned}
$$

21. -

22. Variabeldeklaration:

$x_1 =$ antal ha där soja odlas
$x_2 =$ antal ha där majs odlas
$x_3 =$ antal ha där vete odlas
$x_4 =$ antal mjölkkor som köps in
$x_5 =$ antal hönor som köps in
$y_1 =$ antal vintertimmar som man arbetar på granngården
$y_2 =$ antal sommartimmar som man arbetar på granngården

$$
\max z = 15x_1 + 22x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 0.05x_5 + 0.05y_1 + 0.06y_2
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
 & & & 12000x_4 & +90x_5 & & & \leq & 400000 \\
50x_1 & +85x_2 & +25x_3 & +100x_4 & +0.6x_5 & +y_1 & & \leq & 3500 \\
125x_1 & +190x_2 & +100x_3 & +50x_4 & +0.3x_5 & & +y_2 & \leq & 4000 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +0.6x_4 & & & & \leq & 50 \\
 & & & +x_4 & & & & \leq & 32 \\
 & & & & +x_5 & & & \leq & 3000 \\
 & & & & & y_1 & +y_2 & \leq & 200 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

23. -

24. Variabeldefinition:

$$
x_{ij} = \text{antal ton råvara } i = \begin{cases} 1 & \text{vete} \\ 2 & \text{råg} \\ 3 & \text{korn} \\ 4 & \text{havre} \\ 5 & \text{majs} \end{cases} \text{ i fodersort } j = \begin{cases} 1 & \text{Bas} \\ 2 & \text{Standard} \\ 3 & \text{Special} \end{cases}
$$

Kända storheter:

$$
\begin{array}{lcl}
c_i & = & \text{Kostnad per ton för råvara } i \\
a_{ki} & = & \text{Innehåll av ingrediens } k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{Protein} \\ 2 & \text{Kolhydrat} \\ 3 & \text{Vitamin} \end{array} \right. \text{ i råvara } i \\
\underline{u}_{kj} & = & \text{Undre gräns för innehåll av ingrediens } k \text{ i fodersort } j \\
\bar{u}_{kj} & = & \text{Övre gräns för innehåll av ingrediens } k \text{ i fodersort } j \\
b_j & = & \text{Behov av fodersort } j \\
d_i & = & \text{Tillgång av råvara } i
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcccl}
\min & z = & \sum_{i=1}^{5} c_i \left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \right) & & & \\
\text{då} & \underline{u}_{kj} b_j \leq & \sum_{i=1}^{5} a_{ki} x_{ij} & \leq & \bar{u}_{kj} b_j, & k = 1 \ldots 3, j = 1 \ldots 3 \quad \text{Näringskrav} \\
& & \sum_{i=1}^{5} x_{ij} & = & b_j, & j = 1 \ldots 3 \quad \text{Efterfrågan} \\
& & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & \leq & d_i, & i = 1 \ldots 5 \quad \text{Tillgång råvaror} \\
& & x_{ij} & \geq & 0, & i = 1 \ldots 5, j = 1 \ldots 3 \quad \text{Ickenegativitet}
\end{array}
$$

25. Variabeldefinition:

$x_1 =$ antal enheter kycklingar som föds upp
$x_2 =$ antal enheter ankor som föds upp
$x_3 =$ antal enheter kalkoner som föds upp
$y_1 =$ arbetsinsats i timmar per vecka enligt grundvillkor
$y_2 =$ arbetsinsats i timmar per vecka enligt övertidsvillkor

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
\max z = & 1300x_1 + 860x_2 + 440x_3 - 12(30y_1 + 35y_2) & & & & & & \\
\text{då} & 1,2x_1 & +x_2 & +0,8x_3 & & & \leq & 112 \\
& 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & -y_1 & -y_2 & \leq & 0 \\
& & & & y_1 & & \leq & 200 \\
& & & & & y_2 & \leq & 45 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

26. a) Variabeldefinition:

$x_1 =$ antal anställda som arbetar mån–fre och är lediga lör–sön
$x_2 =$ antal anställda som arbetar tis–lör och är lediga sön–mån
$\vdots$
$x_7 =$ antal anställda som arbetar sön–tor och är lediga fre–lör

$$
\begin{array}{rlcrr}
\min z = & \sum_{j=1}^{7} x_j & & & \\
\text{då} & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & = & 17 & \text{(måndag)} \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 & = & 13 & \text{(tisdag)} \\
& & \vdots & & \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & = & 11 & \text{(söndag)}
\end{array}
$$

b) Man har bortsett från att antalet anställda för varje arbetsskift måste vara heltaligt. Genom att relaxera heltalskravet får man en *optimistisk* uppskattning av hur många anställda som behövs; det verkliga problemets optimum har ett högre värde.

27. Variabeldefinition:

x_1, x_2 = tillverkningsmängd av produkt 1 och 2

y_1, y_2, y_3 = relativ avvikelse från respektive målsättning

$$
\begin{array}{lrcl}
\min z = & 0.5y_1 + 0.3y_2 + 0.2y_3 & & \\
\text{då} & 2x_1 + x_2 & \leq & 1500 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 1200 \\
 & x_1 & \leq & 500 \\
 & \frac{1}{13000}(15x_1 + 10x_2) + y_1 & \geq & 1 \\
 & \frac{1}{1150}(x_1 + x_2) + y_2 & \geq & 1 \\
 & \frac{1}{400}x_1 + y_3 & \geq & 1 \\
 & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

28. Variabeldefinition:

$x_i =$ producerat antal kg enligt normalvillkor under vecka i, $i = 1, \ldots, 6$

$y_i =$ producerat antal kg enligt övertidsvillkor under vecka i, $i = 1, \ldots, 6$

$w_i =$ lagrat antal kg från vecka i till $i + 1$, $i = 1, \ldots, 6$

$$
\begin{array}{lrcll}
\min z = & \sum_{i=1}^{6}(C_1x_i + C_2y_i + pw_i) & & & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^{i}(x_j + y_j) - w_i & = & \sum_{j=1}^{i} b_j & i = 1, \ldots, 6 \\
 & x_i & \leq & K & i = 1, \ldots, 6 \\
 & y_i & \leq & 0,4K & i = 1, \ldots, 6 \\
 & w_i & \leq & L & i = 1, \ldots, 6 \\
 & w_6 & = & 0 & \\
 & x_i, y_i, w_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, 6
\end{array}
$$

29. Inför artificiella variabler i villkor 1 och 2. Lös fas I $\Rightarrow w^* = 2 > 0 \Rightarrow$ tillåten punkt saknas.

30. $x^* = (2, 0, 0), \quad z^* = 10.$

31. a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -2 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ -11/2 & 1 & 7 \end{pmatrix} x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 11/2 & 7 \end{pmatrix} c_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} c_N = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (11/2, 7/2, 4) \ z = 7$

b) $z^* = 43/3 \ x^* = (5/3 \ 4/3 \ 4/3)^T$

32. Det krävs 4800 plåtar, exempelvis 1800 av nr 1 och 3000 av nr 3 (alternativa lösningar finns).

33. Inför artificiella variabler. Lös fas I $\Rightarrow w^* = 1 > 0 \Rightarrow$ systemet saknar lösning.

34. a) $x^* = (15,\ 0,\ 0,\ 5)^T \ \Rightarrow\ z^* = 15$

    b) Ur optimaltablån: $y^* = (2,\ -1)^T$. Verifiera primal och dual tillåtenhet samt stark dualitet.

35. Formulera på kanonisk form:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} -2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +s_1 & & & & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & & & +a_2 & & = & 1 \\ x_1 & & -2x_3 & & -s_3 & & +a_3 & = & 4 \\ & & & \multicolumn{4}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_3,\ a_2,\ a_3} & \geq & 0 \end{array}$$

Målfunktion fas I: $\min w = a_2 + a_3 = 5 - 2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_3$. Iteration 1: ink. x_1, utg. a_2. Iteration 2: ink. x_2, utg. s_1. $w^* = 3/2 > 0 \Rightarrow$ tillåten lösning saknas!

36. Fas I: 2 iterationer ger $x = (1/2\ 3/2)^T$. Fas II: 1 iteration ger $x = (2, 3)^T$.

37. a) Gör om målfunktionen till ett likhetsvillkor $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$. Använd fas I i simplexmetoden för att hitta en tillåten lösning. Tex $x = (2\ 1\ 0)^T$.

    b) Gör ytterligare en iteration där den inkommande variabeln har reducerad kostnad $= 0$. Tex $x = (0\ 9\ 8)^T$.

38. Maximera målfunktionen $7x_1 + 5x_2$ under de givna bivillkoren (utnyttja exempelvis grafisk lösning). Vilken slutsats drar Du med tanke på det optimala målfunktionsvärdet?

39. a) $(0\ 3),\ (2\ 2),\ (6,5\ 1,5),\ (4\ 4)$

    b) $(-3\ 0),\ (0\ 3),\ (1\ 4),\ (6,5\ 1,5),\ (8\ 0),\ (4\ -1),\ (0\ 0),\ (4\ 4)$

    c) $(0\ 3),\ (6,5\ 1,5),\ (4\ 4)$

    d) $(0\ 3),\ (4\ 4)$

    e) $(0\ 3)$

40. Maximala vinsten blir 44000. Den erhålles genom att exempelvis tillverka 100 radialdäck och 500 stålradialdäck (alternativa lösningar finns).

41.

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & t & & & & & & \\ \text{då} & -t & + & x_1 & + & x_2 & \geq & 0 \\ & -t & + & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\ & & - & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & \multicolumn{7}{l}{t \text{ fri};\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0} \end{array}$$

42. a) $w^* = 3 > 0 \Rightarrow$ tillåten lösning saknas.

b) Om en sådan variabel blir inkommande (positiv) så blir fas I målfunktionen positiv $\Rightarrow$ otillåtet.

43. Gör om villkor (0) till målfunktion. Maximera denna målfunktion z. Om $z^* < 35$ är villkoret redundant och om $z^* \geq 35$ är villkoret ej redundant.

44. Fas I: optimal lösning $y = (0,0,2)^T$ $s = (0,3,2)^T$. Fas II: Ingen utgående variabel $\Rightarrow$ obegränsad lösning i dualen $\Rightarrow$ primalen saknar lösning.

45. a) $c^T\bar{x} \leq (A^T\bar{y})^T\bar{x} = \bar{y}^T A\bar{x} = (A\bar{x})^T\bar{y} \leq b^T\bar{y}$

    b) -

    c) -

    d) -

46. -

47. a)

$$\begin{array}{rrcl}
\max w = & 0y_1 + y_2 & & \\
\text{då} & y_1 - y_2 & \geq & 0 \\
& y_1 + y_2 & \leq & -1 \\
& y_1 & \geq & -1 \\
& y_1 + y_2 & \leq & 2 \\
& y_1, y_2 \text{ fria} & &
\end{array}$$

    b) $y^* = (-1/2 \ \ -1/2)^T$ $w^* = -1/2$

    c) $x^* = (-1/2 \ 1/2 \ 0 \ 0)^T$ $z^* = -1/2$

48. a) $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ tillåten

    b) Tillhörande duallösning $y^T = c_B^T B^{-1} = (0,0,2)$ är ej tillåten.

    c) Baslösningen är ej optimal, ty tillhörande duallösning är ej tillåten.

49. a) $y = c_B^T B^{-1} = (2,0)^T$

    b) $c^{\bar{n}y} = 1 \ \Rightarrow$ ej optimal längre

    c) Skuggpriset talar om hur mycket målfunktionsvärdet ändras vid ökning av ett högerled. Välj bivillkor 1 ty $y_1 = 2 > y_2 \Rightarrow \Delta b_1 \leq -8$.

    d) $\bar{c}^{ny} = 1 \Rightarrow$ ej optimalt $\Rightarrow$ låt x_4 vara inkommande. Ny lösning $x^* = (4 \ 4)^T$, $z^* = 20$.

50. a) $x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}$ ty $BB^{-1} = I$ om $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    $c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $z = 4$, $y^T = c_B^T B^{-1} = (-3,2,0)$

    $c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (7,3,-2) \Rightarrow$ ej optimal. x_1 inkommande, x_2 utgående.

b) Duallösningen fås mha komplementaritet, $y = (6/5\ 3/5)^T$. Primallösningen och duallösningen är tillåtna $\Rightarrow x$ är optimal.

51. a) $z = 8$, $x_B = (x_3, s_1, s_3)^T = (4, 16, 2)^T$, $x_N = (x_1, x_2, s_2)^T$
$y^T = c_B^T B^{-1} = (0, 2, 0)$, $\bar{c}_N = (3, 2, -2)$
x_1 ink., s_3 utg. $\Rightarrow$ ny lösning $(2/3,\ 0,\ 14/3,\ 44/3,\ 0,\ 0)^T$, $z = 10$

b) Ja, ty $\bar{y}^T = (0\ 1\ 1)$ dualt tillåten. Primalt tillåten, dual tillåten samt komplementaritet uppfyllt $\Rightarrow$ optimum.

c) $x^* = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\ 0 \leq \lambda \leq 1$ där $x^1 = (0, 1, 3)^T\ x^2 = (2/3,\ 0,\ 14/3)^T$.

52. Dualvariabeln får värdet 1.

53. x^* är tillåten. En komplementär duallösning ges av $y^* = (50, 0, 100)^T$. Denna är tillåten i dualen, varför x^* är optimal.

54. a) $x^* = (1,\ 1,\ 0)^T$, $z^* = 5$

b) -

c) x^* primalt tillåten $y^* = (1,\ 1)^T$ dualt tillåten $\Rightarrow x^*$ optimal

d) x^* optimal om $2c_1 \geq c_2 \geq c_1$ och $3c_1 - 2c_2 \leq 4$

55.

$$\begin{array}{ll} \max & \lambda_0^T a \\ \text{då} & \left\{ \begin{array}{lll} \lambda_k^T = \lambda_{k+1}^T A + c_k^T & k = 0, 1, \ldots, N-1 & \\ \lambda_N^T = c_N^T & & (\text{med } c_0 = d_0 = 0) \\ \lambda_k^T \geq -d_{k=1}^T & k = 1, 2, \ldots, N & (\text{Anm: } d_N \geq 0 \text{ nödvändigt}) \end{array} \right. \end{array}$$

56. Formulera dualen och använd komplimentaritet. Detta ger $y_1^* = 0$ samt $y_3^* = 1/2$. Då återstår ett optimeringsproblem i en variabel som ger $y_2^* = 5/2$. Denna punkt är dualt tillåten. Kompl. ger $x^* = (0\ 105\ 230)^T$. Denna lösning är primalt tillåten. Alltså y optimal $\Rightarrow$ förmodan sann.

57. Kontrollera om den primala punkten $\bar{x}$ som erhålls med hjälp av komplementaritet är tillåten i den primala problemet. $\bar{x} = (0\ 5/3\ 4/3)^T$ primalt tillåten, y^* dualt tillåten, samt komplementaritet medför optimum.

58. -

59. a) $z^* \leq z_{NY}^*$

b) $z^* = z_{NY}^*$

c) $z^* \geq z_{NY}^*$

d) ingen relation existerar

e) $z^* \geq z_{NY}^*$

f) $z^* \leq z_{NY}^*$

60. -

61.

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{i=1}^{m_1} y_i + \sum_{j=1}^{m_2} z_j & & & \\ \text{då} & a_i^T x & \leq & b_i + y_i & \forall i \\ & d_j^T x & \leq & e_j - z_j & \forall j \\ & y_i & \geq & 0 & \forall i \\ & z_j & \geq & 0 & \forall j \end{array}$$

Om målfunktionsvärdet är 0 är alla villkor uppfyllda.

62. Använd definitionen på konkav funktion

63. a) Formulera dualen och använd komplimentaritet. Detta ger för $\bar{x} = (200\ 100)^T$ den duala lösningen $\bar{y} = (0\ 50\ 50)^T$. $\bar{x}$ primalt tillåten, $\bar{y}$ dualt tillåten och komplementaritet är uppfyllt $\Rightarrow$ optimum.

b) Rimligt pris är åtminstone 100 kr

c) Lösningen optimal om $\bar{c}_N = c_N - c_B^T B^{-1} N \leq 0$ och $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} \geq 0$ där $\bar{b} = b + (350\ 800\ 200)^T$. $\bar{c}_N$ förändras inte av $\bar{b}$, dvs undersök bara $\bar{x}$. Basvariabler: $x_1, x_2, s_1 \Rightarrow \bar{x}_B = (200\ 300\ 50)^T$ tillåten. Samma bas $\Rightarrow$ förändringen av målfunktionsvärdet ges av: $y^T(300\ 800\ 200)^T = 50000$. Man är villig att betala max 50000.

64. $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}b^{ny} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 44 \end{pmatrix} c_B^T B^{-1} b^{ny} = 328$

Använd duala simplex för att hitta en tillåten lösning, $x = (0\ 2\ 34)^T$.

65. a) Skuggpriset $= 7/6$

b) $b_1 \leq 13$

c) $c_1 \leq 4/3$

66. a) Skuggpriset är 3 och är giltigt för högerled mellan 4 och 6.

b) $x^* = (1,\ 4)^T$

c) $x^* = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

67. a) $-3 \leq b_2 \leq 13$

b) -

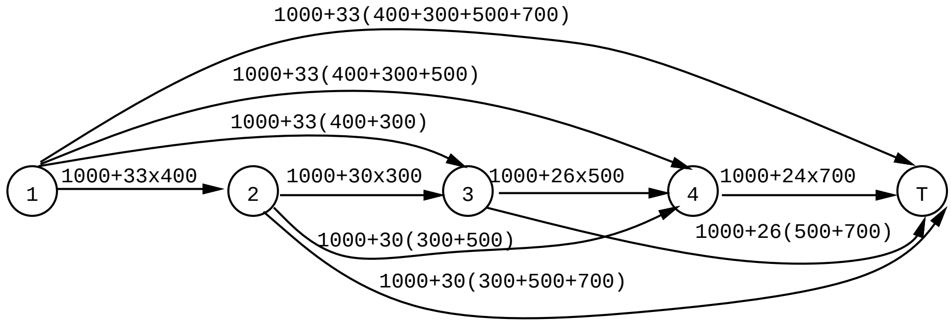
c) $c > 3$

68. a) $y^* = (7/5\ 1/5)^T$, $w^* = 10$

b) Lösningen är optimal då reducerade kostnaden för x_1 är negativ. Låt a vara det osäkra värdet. $\bar{c}_1 = 2 - ay_1^* - y_2^* \leq 0 \Rightarrow\ a \geq 9/7$

c) Inför $x_4 = x_4' + \epsilon$. Målfunktionsvärdet minskar med $2,8\epsilon$. Förändringen gäller så länge vi har samma baslösning, dvs $x_2^*, x_3^* \geq 0 \Rightarrow\ \epsilon \leq 20/11$ och $\epsilon \leq 10/7$. Svaret gäller då $\epsilon \leq 10/7$.

69. Nätverk:



En båge från nod i till nod j symboliserar att lådtyp i används för att tillgodose efterfrågan av lådor typ i t o m $j-1$.

70. Transportproblem med 4 källor (2 fabriker i 2 perioder) och 4 sänkor (2 varuhus i 2 perioder). Inför ett skenvaruhus med efterfrågan 192-185=7. Bågkostnader är summan av tillverknings-, lagerhållnings- och transportkostnader.

71. Variabeldefinition:

$$\begin{array}{rcl} x_{ij} & = & \text{Flöde från } i \text{ till } j \\ y_i & = & \text{Produktionsnivå} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} & \min z = g(y) + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} & & \\ \text{då} & \sum_j x_{ij} & = & y_i \\ & \sum_i x_{ij} & = & b_j \\ & y_i & \leq & s_i \\ & x_{ij}, y_j & \geq & 0, \text{ heltal} \end{array}$$

72. a) Ett dyraste vägproblem. Noderna är redan topologiskt sorterade. Märk varje nod med vägkostnad samt varifrån man kommer. Byggtiden blir 44 dagar. Kritiska: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_9, b_{11}, b_{14}$.

    b) Utvändig målning b_{10} är ej med i den kritiska sekvensen. Att slutföra målningen tar 9 dagar och efteråt måste utrustning utvändigt (b_{13}) göras i två dagar. Börja alltså senast den 34:e dagen.

    c) En cykel skulle betyda att en aktivitet måste föregå sig själv.

73. Maximera sannolikheten att samtalet ej bryts. Bågkostnad = (1 - sannolikheten för avbrott). Sök väg med maximal produkt (multiplikativ målfunktion). Bästa väg: A-C-E. Sannolikhet för avbrott är 1 - 0.6 = 0.4.

74. Optimala bågar: $(1,3)$, $(2,4)$, $(1,5)$, $(4,6)$, $(5,6)$, $(6,7)$. Kostnad 21.

75. a) $y_j = \max\limits_{i:(i,j)\in B} \min\{y_i, u_{ij}\}$ med $y_1 = +\infty$

Ett nodpris ger den maximala kapaciteten från nod 1 till noden ifråga.

b) Avsök efter fallande nodprisordning. Nodpriser: $(+\infty, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$. Optimalt träd: (1,2), (2,3), (1,4), (4,5), (5,6), (6,8), (5,7), (7,9) [ej unikt].

76. a) Eftersom billigaste vägproblemet har heltalsegenskap kan man betrakta LP-relaxationen av den matematiska formuleringen. Bellmans ekvationer härleds med hjälp av den reducerade kostnaden $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$, där y_j betecknar dualvariabeln till villkoret för nod j (dvs nodpriset). Dual tillåtenhet ska vara uppfylld dvs $\bar{c}_{ij} \geq 0$. För bågar som är basbågar gäller att $\bar{c}_{ij} = 0$ dvs $y_j = c_{ij} + y_i$. För icke-basbågar gäller att $\bar{c}_{ij} \geq 0$ vilket medför att $c_{ij} + y_i - y_j \geq 0$ dvs $y_j \leq c_{ij} + y_i$. För alla bågar gäller då att $y_j = \min\limits_{i:(i,j)\in B} \{y_i + c_{ij}\}$. Optimala nodpriset är kostnaden för en billigaste väg från nod 1.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Billigaste väg : $1 - 2 - 4 - 5 - 6$

d) Högerleden $b = (1, 0, 0, 0, 0, -1)^T$ byts mot $b = (5, -1, -1, -1, -1, -1)^T$. Dijkstras algoritm påverkas inte. [I det fall man söker en billigaste väg till *en* nod så kan algoritmen avbrytas så fort denna nod uppnåtts (beroende på att noderna avsöks i stigande nodprisordning), men om vägar söks till alla andra noder så måste algoritmen naturligtvis fortsätta tills dess alla andra noder uppnåtts.]

e) Om primalen har obegränsad lösning saknar dualen lösning. Verifieras genom att formulera dualen till problemet:

$$\begin{array}{lrcll} \max & y_1 - y_6 & & & \\ \text{då} & y_1 - y_2 & \leq & 4 & \\ & y_1 - y_3 & \leq & 3 & \\ & y_2 - y_3 & \leq & 1 & \\ & y_2 - y_4 & \leq & 2 & (*) \\ & y_3 - y_5 & \leq & 5 & \\ & y_4 - y_5 & \leq & 1 & (*) \\ & y_4 - y_6 & \leq & 5 & \\ & y_5 - y_2 & \leq & -4 & (*) \\ & y_5 - y_6 & \leq & 3 & \end{array}$$

Titta på cykeln $2 - 4 - 5 - 2$. Betrakta villkoren markerade med (*). En av variablerna får väljas fritt i dualen, välj tex $y_2 = 0$. Alltså $y_4 \geq -2$ samt $y_5 \leq -4$. Det medför att $y_4 - y_5 \geq -2 - (-4) = 2 \Rightarrow$ det tredje villkoret $y_4 - y_5 \leq 1$ inte går att uppfylla. Alltså saknar dualen lösning.

77. Målfunktion

$$\min \sum_i \sum_j (c_{ij} + d) x_{ij}$$

där d är ett stort tal (större än dyraste väg i nätverket)

78. a) $v_4^* \leq v_1^* \leq v_2^*, \; v_4^* \leq v_3^* \leq v_2^*$

    b) $v_4^* = v_1^* \leq v_3^* = v_2^*$

79. a)

$$\begin{array}{lrcl}
\min & 3x_{13} - x_{14} + 6x_{21} + 2x_{32} + 3x_{35} + 2x_{36} - 6x_{34} + 7x_{46} - 2x_{52} - 8x_{54} + 3x_{65} & & \\
\text{då} & x_{13} + x_{14} - x_{21} & = & 5 \\
 & x_{21} - x_{32} - x_{52} & = & -1 \\
 & x_{32} + x_{35} + x_{36} + x_{34} - x_{13} & = & -1 \\
 & x_{46} - x_{14} - x_{34} - x_{54} & = & -1 \\
 & x_{52} + x_{54} - x_{35} - x_{65} & = & -1 \\
 & x_{65} - x_{36} - x_{46} & = & -1 \\
 & x_{ij} & \geq & 0
\end{array}$$

    b) $y_j = \min_i \{c_{ij} + y_i\}, \quad j = 2, .., n, \quad y_1 = 0$

    c) -

    d) Billigaste vägträd: $(1,3)$, $(3,4)$, $(5,2)$, $(3,5)$, $(4,6)$.

    e) $-7 \leq c_{34} \leq -5$

80. a) -

    b) Billigaste väg: $1 \to 2 \to 5 \to 6$, Kostnad 8

    c) Raderna i anslutningsmatrisen är linjärt beroende.

81. a) $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(3,6)$, $(5,6)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(6,9)$, $(6,10)$, $(10,11)$. $z = 28$.

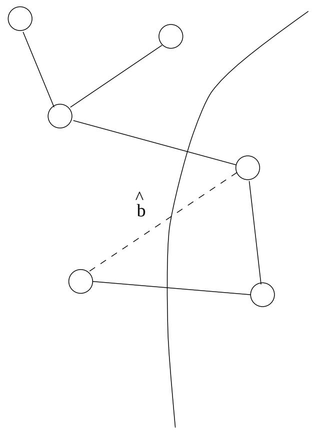
    b) Ta bort bågen från trädet. Vi erhåller en skog av två träd T_1 och T_2. Vi behöver bara betrakta alla bågar mellan T_1 och T_2 och välja den billigaste för att återkoppla dessa till ett uppspännande träd. Här kan någon av bågarna $(2,5)$, $(2,6)$, $(4,6)$ eller $(4,7)$ väljas.

82. a) Opt.villkor $y_j \leq y_i + c_{ij}$ (likhet om bågen ingår i BV-trädet). Det givna trädet är ej optimalt ty $y_5 = 19 \not\leq 10 = 6 + 4 = y_3 + c_{35}$.

    b) BV-träd: $(s,1)$, $(1,4)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(3,5)$, $(5,t)$.

83. a) Målfunktionen minimerar trädets totalkostnad. Villkor (1) tillser att antalet bågar blir korrekt. Villkoren (2) tillser att inga subturer uppkommer, dvs man tittar på alla delmängder S av N och inom varje delmängd S ska det finnas (strikt) färre bågar än noder (ty annars finns en subtur).

    b) -



c) Villkor (3) gäller även det en delmängd S men villkoret ser till att det finns minst en båge mellan S och komplementet till S. Dvs (2) tittar på antalet bågar i S medan (3) betraktar antalet bågar utifrån (eller in i) S.

d) Bevis: Betrakta ett MST enligt figuren.
Välj ett godtyckligt snitt. Antag att den billigaste bågen över snittet, $\hat{b}$, inte ingår i MST $\Rightarrow$ Byt någon båge i MST över snittet mot $\hat{b} \Rightarrow$ Trädet billigare än MST. Motsägelse!!

e) $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(5,7)$ och $(7,8)$. Kostnad 16.

84. a) i) Falskt ii) Falskt iii) Falskt
    b) i) Sant ii) Sant iii) Sant

85. a) $(1,2),(2,3),(2,6),(4,5),(5,6),(5,7),(5,8),(6,9)$
    b) i) Om $(i,j) \notin$ billigaste uppspännande träd, trädet fortfarande optimal
    Om $(i,j) \in$ billigaste uppspännande träd, hitta den billigaste bågen i snittet!
    ii) (i,j) införs $\Rightarrow$ En cykel i trädet. Ta bort den dyraste bågen i cykeln $\Rightarrow$ nytt billigaste uppspännande träd.

86. Variabeldefinition:

$$z_i = \begin{cases} 1 \text{ om balk } i \text{ utnyttjas} \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,M$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ om längd } l_j \text{ läggs in på balk } i \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,M \\ j = 1,2,\ldots,N \end{matrix}$$

$$y_i = \text{ spillet från balk } i \qquad i = 1,2,\ldots,M$$

$$\min \sum_{i=1}^{M} y_i$$

$$\text{då} \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = 1 & j = 1,2,\ldots,N \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_{ij} l_j + y_i = z_i L_i & i = 1,2,\ldots,M \\ x_{ij},\ z_i \in \{0,1\},\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

87. Variabeldefinition:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{om låt } j \text{ från skiva } i \text{ hamnar på CD nr } k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Givna konstanter:

$a_{ij} =$ speltid i sek för låt j på skiva i
$c_{ij} =$ poäng för låt j på skiva i

$$\begin{array}{llrcll} \max z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{2} c_{ij}x_{ijk} & & & & \\ \text{då} & & \displaystyle\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk} & \geq & 2 & i = 1, \ldots, 6 \\ & & \displaystyle\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_{ijk} & \leq & 3600 & k = 1, 2 \\ & & x_{ij1} + x_{ij2} & \leq & 1 & i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, \ldots, 10 \\ & & x_{ijk} & \in & \{0, 1\} & \forall\, i, j, k \end{array}$$

88. Variabeldefinition:

$x_j = 1/0$ om spelare j startar eller ej.

$$\begin{array}{ll} \max z = & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{7} x_j = 5 \\ & x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 3 \\ & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 2 \\ & x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{7} p_jx_j \geq 10 \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{7} s_jx_j \geq 10 \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{7} r_jx_j \geq 10 \\ & x_3 + x_6 \leq 1 \\ & x_2 + x_3 = 1 \\ & x_4 + x_5 \geq 2x_1 \\ & x_j \in \{0, 1\},\ \forall\, j \end{array}$$

89. Variabeldefinition:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{om brandstation } j \text{ är kvar} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \min z = & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_5 \geq 1 \\ & x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ & x_2 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ & x_3 + x_4 \geq 1 \\ & x_j \in \{0, 1\},\ \forall j \end{array}$$

90. Variabeldefinition:

x_j = antal inköpta plankor av längd j meter, $j = 1, 2, 4$

$$x_5 = \begin{cases} 1 & \text{om 5-meters paketet köps} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{om vi får rabatt för 1-meters plankorna} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

y_2 = dito 2-meters

y_4 = antal "gratisbrädor" av längd 4 m

$$\begin{array}{ll} \min z = & 36x_1 + 70x_2 + 145x_4 + 15 * 170x_5 - 50y_1 - 50y_2 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + 4(x_4 + y_4) + 5 * 15x_5 \geq 90 \\ & 15y_1 \leq x_1 \\ & 15y_2 \leq x_2 \\ & 10y_4 \leq x_4 \\ & x_4 \leq \mathrm{M}(1 - x_5) \\ & x_1, x_2, x_4, y_4 \geq 0, \text{heltal} \\ & y_1, y_2, x_5 = 0/1 \end{array}$$

91. Variabeldefinition:

x_{ij} = starttid för jobb i på maskin j

$$y_{ikj} = \begin{cases} 1 & \text{om jobb } i \text{ körs efter jobb } k \text{ på maskin } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \min z & & \\ \text{då} & z \geq x_{i3} & i = 1,2,3 \\ & \left.\begin{array}{l} x_{ij} + t_{ij} \leq x_{kj} + \mathrm{M}y_{ikj} \\ x_{kj} + t_{kj} \leq x_{ij} + \mathrm{M}(1 - y_{ikj}) \end{array}\right\} & \begin{array}{l} j = 1,2,3 \\ i,k = 1,2,3,\ i \neq k \end{array} \\ & x_{ij} + t_{ij} \leq x_{i(j+1)} & i = 1,2,3,\ j = 1,2 \\ & x_{ij} \geq 0 & i = 1,2,3,\ j = 1,2 \\ & 0 \leq y_{ikj} \leq 1, \text{heltal} & i,k = 1,2,3,\ i \neq k,\ j = 1,2 \end{array}$$

92. Variabeldefinition:

$$x_j = \text{antal möbler som köps in av typ } j \ (j = \text{antal sittplatser})$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{om fler än 15 fåtöljer köps} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{om fler än 25 fåtöljer köps} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{om Linus köper 3-sitssoffor} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_4 = \begin{cases} 1 & \text{om Linus köper 4-sitssoffor} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\min z = 3.5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 10y_1 & & & & & & & \\
\text{då} \quad x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +5y_2 & \geq & 50 \\
\quad\quad x_1 & +x_2 & +x_3 & x_4 & +5y_2 & \geq & 25 \\
 & & & & x_1 & \geq & 10 \\
 & & & & x_3 & \leq & My_3 \\
 & & & & x_4 & \leq & My_4 \\
 & & & y_3 & +y_4 & \leq & 1 \\
 & & & & x_1 & \geq & 15y_1 \\
 & & & & x_1 & \geq & 25y_2 \\
 & & & & x_j & \geq & 0, \ \text{heltal} \\
 & & & & y_j & \in & \{0, \ 1\}
\end{array}$$

93. Variabeldefinition:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om snön från sektor } i \text{ körs till avstjälpningsplats } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{om avstjälpningsplats } j \text{ används} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Givna konstanter:

d_{ij} = Transportkostnad ($/m^3$ snö) från sektor i till avstjälpningsplats j
v_i = årlig volym av snö i sektor i (m^3/år)
V_j = årlig kapacitet hos avstjälpningsplats j (m^3/år)
f_j = årlig kostnad för att hålla avstjälpningsplats j öppen

$$\begin{array}{llll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} v_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j & & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq V_j & & \forall\, j \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & & \forall\, i \\
 & x_{ij} \leq y_j & & \forall\, i, \ j \\
 & x_{ij}, y_j \in \{0,1\} & & \forall\, i, \ j
\end{array}$$

94. Variabeldefinition:

x_{ij} = Antalet folk som flyttas från regemente i till övn område j. $j = 1, 2, 3, 4$ där $j = 4$ är beredskap.

$$\begin{array}{lrcll}
\min & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} & & & \\
\text{då} & \sum_i x_{ij} & = & s_i & i = 1, 2, 3 \\
& \sum_j x_{ij} & \leq & d_j & j = 1, 2, 3 \\
& \sum_j x_{ij} & = & d_4 & \\
& x_{ij} & \geq & 0, \text{heltal} &
\end{array}$$

där c_{ij} är förflyttningskostnaderna givna i tabellen (förflyttningskostnaden till beredskapen är 0). s_i är antalet mannar på resp. regemente och d_j är antalet som maximalt kan tas emot på resp. övningsområde samt beredskapen. [Detta problem går att enkelt beskriva med en graf. Grafen blir tudelad (källor på ena sidan och sänkor på den andra). Problemet kallas transportproblem.]

95. a) Variabeldefinition:
$y_i = 0/1$ om maskin i startas eller ej
x_i = heltal antal tillverkade produkter i maskin i

$$\begin{array}{lrcll}
\min z = & 1000y_2 + 600y_3 + 300y_4 + 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 & & & \\
\text{då} & x_1 & \leq & 2000y_1 & \\
& x_2 & \leq & 4000y_2 & \\
& x_3 & \leq & 1000y_3 & \\
& x_4 & \leq & 3000y_4 & \\
& 0,9x_1 + 0,95x_2 + 0,85x_3 + 0,92x_4 & \geq & 5000 & (*) \\
& x_i \text{ heltalig}, \ y_i & \in & \{0, 1\} &
\end{array}$$

b) Skriv om (*) som $\sum_{i=1}^{4} a_i x_i \geq b_i$

i) Öka b_i för att skapa en felmarginal

ii) Modifiera a_i genom att exempelvis skala den med standardavvikelsen.

96. a) Variabeldefinition:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om person } i \text{ jobbar dag } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$i = 1, 2$ är personerna som kan ta hand om espressomaskinen. c_{ij} är person i's poäng dag j.

$$\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} & & & \\
\text{då} & x_{1j} + x_{2j} & \geq & 1 \quad j = 1,2,..,6 & \text{en måste sköta espresson varje dag} \\
& \sum_i x_{ij} & \geq & 4 \quad j = 1,2,..,6 & \text{minst 4 måste arbeta varje dag} \\
& \sum_j x_{ij} & \leq & 4 \quad i = 1,2,..,4 & \text{ingen ska jobba mer än 4 dagar} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & & &
\end{array}$$

b) Ändra målfunktionen till $\max l$ där l är en variabel. Lägg till villkoren $\sum_j c_{ij} x_{ij} \geq l,\ i = 1,2,..,6$

97. Endast påstående (iii) är sant.

98.

a)
$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & \leq & 2 + y_1 M \\
2x_1 + 3x_2 & \geq & 8 - y_2 M \\
y_1 + y_2 & \leq & 1 \\
y_1, y_2 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcl}
0y_3 + 5y_4 + 9y_5 + 12y_6 & = & x_3 \\
y_3 + y_4 + y_5 + y_6 & = & 1 \\
y_3, y_4, y_5, y_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcl}
x_4 + x_5 & \leq & 2 + y_7 M \\
x_4 & \leq & 1 + y_8 M \\
x_5 & \leq & 5 + y_9 M \\
x_4 + x_5 & \geq & 3 - y_{10} M \\
y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} & \leq & 2 \\
y_7, y_8, y_9, y_{10} & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

99. $x^* = (1\ 0\ 1\ 1)^T$

100. $x^* = (1\ 0\ 1\ 0)^T$, $z^* = 12$

101. a) Välj "nyttokvoten" så liten som möjligt. $x^* = (0\ 1\ 1\ 0)^T$, $z^* = 8$

b) x_1 och x_2 kan inte ensamma uppfylla villkoret. Alltså måste minst en av x_3 eller x_4 vara 1. Samma lösning som i a) men trädet blir betydligt mindre, vissa lösningar i a) är inte tillåtna i b).

102. $x^*_{HP} = (2,2)^T$, $z^*_{HP} = 12$.

103. a) $x^* = (3,1)^T$, $z^* = 39$

b) Man måste känna till punkterna $x_1 = (0,0)^T$, $x_2 = (3,0)^T$, $x_3 = (3,1)^T$, $x_4 = (0,4)^T$ för att beskriva konvexa höljet matematiskt.

$$K = \{x \mid x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4,\ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \forall\ i\}$$

c) $2x_1 + 3x_2 \leq 12 + M(1-y)$
$2x_1 + x_2 \leq 7 + My$
$x_1,\ x_2 \geq 0$, heltal, $y = 0/1$
M stort tal

104. Variabeldefinition:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{om investering görs i projekt j} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = 7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 & & \\ \text{då} & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 & \leq & 6 \\ & x_i & \in & \{0\ ,\ 1\} \end{array}$$

Lösning $x^* = (0,0,1,1)^T\ z^* = 9$

105. $x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = x_4^* = 1, z^* = 15$

106. a)) $z^* = 82$ (Om lösningen i P7 ej vore tillåten skulle vi förgrenat vid P7)

b) $82 \leq z^* \leq 85$, förgrena vid P7.

c) 5 st. (P1, P2, P3, P4, P5)

107. a) $x_1^* = 3, x_2^* = 1, z^* = 23$

b) $x_1 + x_2 \leq 4, \quad x_1 \leq 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

c) $x_1 \leq \min\ \{\lfloor\frac{12}{2}\rfloor, \lfloor\frac{7}{2}\rfloor\} = 3$, $x_2 \leq \min\ \{\lfloor\frac{12}{3}\rfloor, \lfloor\frac{7}{1}\rfloor\} = 4$
$x_1 = y_1 + 2y_2, \quad y_1, y_2 \in \{0,1\}, \quad x_2 = y_3 + 2y_4 + 4y_5, \quad y_3, y_4, y_5 \in \{0,1\}$

108. a) Om n är jämn: De $n/2$ st bästa"variablerna = 1, övriga = 0.
Om n är udda: De $(n-1)/2$ st bästa"variablerna = 1, övriga = 0.

b) I trädsökningsmetoder får vi förgrena över samtliga variabler innan något "händer". Förfarandet kan bli värre än fullständig uppräkning. Prova själv på ett litet exempel!

109. a) $z_1 \leq z_2$, $z_1 \leq z_3$, $z_1 \leq z_4$, $z_3 \leq z_4$

b) $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq w_4 \geq w_5$

c) $w_3 \leq z_4$ om vi kapar grenen eftersom den optimistiska uppskattningen var sämre än bästa tillåtna lösning (pessimistisk uppskattning)
$z_4 = w_4 < w_3$, om vi hittar en bättre heltalslösning i nod 4.

110. a) Fel 1: $z(4) > z(5)$ Efter en förgrening kan en undre gräns ej minska i minproblem. Fel 2: $z(9) > z(3) = 65 \Rightarrow$ Nod 9 borde kapas.

b) i) Ja, denna LP-lösning kan inte ligga i konvexa höljet av heltalslösningarna.
ii) Nej, LP-lösningen kan vara heltalig (dock ej optimal). I så fall ligger den i konvexa höljet. Men den kan också vara utanför höljet.

111. Använd trädsökning, där LP problemen löses grafiskt. $x^* = (2\ 2)^T\ z = 14$

112. a) Heltalssnitt: rad (1): $2x_1 + x_2 \geq 4$, rad (2) $x_1 + x_2 \geq 3$

b) De två snitten från a) samt icke-negativitet bildar det konvexa höljet.

c) Nej, ty snittet skär bort den tillåtna heltalslösningen $(2,1)^T$.

113. a) Tillåtna heltalspunkter: $(2,0)^T,\ (1,2)^T,\ (0,3)^T,\ (0.4)^T$. Konvexa höljet defineras av $x_1 \geq 0$, $2x_1 + x_2 \leq 4$, $3x_1 + 2x_2 \geq 6$.

b) Heltalssnitt: $2x_1 + x_2 \geq 3$ (z-raden), $4x_1 + 3x_2 \geq 8$ (x_2-raden). Inget snitt är en fasett.

c) -

114. -

115. a) -

b) $x_1 + x_2 \leq 6$ (svagare villkoret: $x_1 + x_2 \leq 76/11$).

c) -

116. Variabeldefinition:

$x_{it} =$ antal produkter av typ i som tillverkas i period $t,\ i = 1,2;\ t = 1,\ldots,4$
$O_t =$ använd övertid i period $t,\ t = 1,\ldots,4$
$L_{it} =$ utgående lagernivå av produkt i, i period $t,\ i = 1,2;\ t = 1,\ldots,4$ $(L_{10} = 4,\ L_{20} = 8)$

$$\min \sum_{t=1}^{4} \left[100(0.9x_{1t} + 0.8x_{2t}) + 600 \left[\frac{0.9x_{1t} + 0.8x_{2t}}{40} \right]^4 \right] + 250 \sum_{t=1}^{4} O_t + \sum_{t=1}^{4} (15L_{1t} + 14L_{2t})$$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{då} & 0.9x_{1t} + 0.8x_{2t} - O_t & \leq & 40 & t = 1,\ldots,4 \\
& O_t & \leq & 4 & t = 1,\ldots,4 \\
& L_{i,t-1} + x_{it} - D_{it} - L_{it} & = & 0 & i = 1,2;\ t = 1,\ldots,4 \\
& x_{it}, O_t, L_{it} \geq 0,\ \forall i,j & & &
\end{array}$$

där $D = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 20 & 15 \\ 20 & 24 & 40 & 30 \end{pmatrix}$

117. Variabeldefinition:

$x_i = x$-koordinat för lampa i (m)
$y_i = y$-koordinat för lampa i (m)
$z_i =$ effekt i lampa i (W).

$$\begin{array}{lll}
\min & z_1 + z_2 & \\
\text{då} & \dfrac{kz_1}{x_1^2 + y_1^2} + \dfrac{kz_2}{x_2^2 + y_2^2} \geq T & (1) \\
& \dfrac{kz_1}{(x_1 - L)^2 + (y_1 - \frac{L}{2})^2} + \dfrac{kz_2}{(x_2 - L)^2 + (y_2 - \frac{L}{2})^2} \geq T & (2) \\
& \dfrac{kz_1}{(x_1 - 2L)^2 + (y_1 - L)^2} + \dfrac{kz_2}{(x_2 - 2L)^2 + (y_2 - L)^2} \geq T & (3) \\
& 0 \leq x_i \leq 2L\ \forall i & (4) \\
& 0 \leq y_i \leq L\ \forall i & (5) \\
& 0 \leq z_i \leq M\ \forall i & (6)
\end{array}$$

Ja, problemet är konvext.

118. a) Variabeldefinition:

$x_1 = x$-koordinat för lagret (km)

$x_2 = y$-koordinat för lagret (km).

$$\min f(x) = 200\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-10)^2} + 150\sqrt{(x_1-10)^2+(x_2-5)^2} + 200\sqrt{x_1^2+(x_2-12)^2} + 300\sqrt{(x_1-12)^2+x_2^2}$$

b) Ja, ty problemet är konvext.

119. a) $\max\limits_{R\geq 0} v^2 \dfrac{R}{(r+R)^2}$

b) $R^* = r$

120. a) Variabeldefinition:

$l =$ längd på lådan

$b =$ bredd på lådan

$h =$ höjd på lådan

$$\begin{array}{rcl}
\min f = & & 10(bl+2bh+2lh)+25bl \\
\text{då } lb+2bh+2lh & \leq & 8 \\
lbh & \geq & 1 \\
h & \leq & \frac{1}{10}(2l+2b) \\
2\sqrt{l^2+b^2} & \leq & 4 \\
l & \leq & 2 \\
b & \leq & 1.5 \\
h & \leq & 1 \\
l, b, h & \geq & 0
\end{array}$$

b) Fixera $l = \hat{l} \geq 0$, sätt $h = \hat{h} + \delta \geq 0$, $b = \hat{b} - \delta \geq 0$

$\Rightarrow f$ konkav tex längs linjen $h = \hat{h} + 8$, $b = \hat{b} - 8$, $l = \hat{l}$

121. a)

$$\begin{array}{rcl}
\min f(x_1, x_2) = & & 0.5x_1^2 + 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2 \\
\text{då } 2x_1 + 1.5x_2 & \geq & 1.2 \\
x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b) -

122. Alla är konvexa.

123. -

124. a) Konvex funktion, ej differentierbar för $x_1 = 0$.

b) Varken konvex eller konkav funktion, men differentierbar överallt.

c) Konkav funktion, ej differentierbar för $x_1 = 1$.

d) Konvex funktion, ej differentierbar i alla punkter.

e) Konkav funktion, ej differentierbar i alla punkter.

f) Konvex funktion, ej differentierbar i origo. (Konvexitet visas med hjälp av triangelolikheten. För att visa icke-differentierbarheten, betrakta en stråle genom origo, dvs $x_1 = c_1t,\ x_2 = c_2t$ där $t \in R$.)

125. -

126. Logaritmera båda leden och visa att $\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$.

Induktionsbevis

(i) Olikheten gäller för $n = 2$ eftersom $\ln(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \geq \{\ln \text{ konkav}\} \geq \frac{1}{2}\ln(x_1) + \frac{1}{2}\ln(x_2) \geq \frac{1}{2}(\ln(x_1) + \ln(x_2))$.

(ii) Antag att olikheten gäller för $n-1$, dvs $\ln\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-1}x_i \geq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\ln(x_i)$.

(iii) Visa att olikheten gäller för n.

$$\ln\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i = \ln(\frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-1}x_i) \geq \{\ln \text{ konkav}\}$$
$$\geq \frac{1}{n}\ln(x_n) + \frac{n-1}{n}\ln(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-1}x_i) \geq \{(ii)\} \geq \frac{1}{n}\ln(x_n) + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\ln(x_i) =$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i).$$

127. a) Nej! Tag t ex $x^1 = (2\ 2)^T$ och $x^2 = (-2\ -2)^T$. x^1 och x^2 är båda tillåtna punkter men $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 = (0\ 0)^T$ är ej en tillåten punkt.

b) För alla f sådana att $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(2,2) + \lambda_2 \nabla g_2(2,2) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$

128. a) Konvex

b) $X_1 = \{x|x^2 \geq 4\}$ ej konvex, $X_2 = \{x|x \geq 0\}$ konvex. $X_1 \cap X_2 = \{x|x \geq 2\}$ konvex

129. a) Dela upp funktionen i tre delfunktioner: $f_1 = x_1^2 + 3x_3^2 - 3x_1x_3$, $f_2 = 2x_2^2 + x_4^2 - x_2x_4$ och $f_3 = e^{x_2+x_4}$. Alla dessa är konvexa funktioner var för sig och summan av dem är därför också en konvex funktion.

b) Dela upp målfuntionen i tre delar. Utnyttja kända satser.

130. a) Konvex då $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ och $x_1x_2 \geq 3/4$. Konkav då $x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 0$ och $x_1x_2 \geq 3/4$.

b) Ja, ty det tillåtna området ligger helt inom området där funktionen är konvex.

131. Ja, ty problemet är konvext.

132. Nej, ty vinkeln mellan gradienten och d är spetsig (positiv skalärprodukt) vilket implicerar ascentriktning.

133. $\nabla f(x) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha,\ \beta \geq 0$

Gradienten skall ligga i den kon som spänns upp av de båda bivillkorens normaler i origo.

134. a) $2d_1 + d_2 \leq 0$

b) $3d_1 + 20d_2 \geq 0$

c) Studera tex riktningen $\bar{d} = (-1,\ 1)^T$. $\bar{d}$ är tillåten och descent. $\bar{x}$ är alltså ej optimal.

d) Tex $d = (-1,\ 2)^T$.

e) -

135. a) -

b) -

c) Punkten är *inte* ett lokalt minimum.

136. a) $d = -(2\ 3/4)^T \quad -\nabla f(\bar{x})^T d = -21/8 < 0$ ej descent.

b) $d = -(2\ \ -3/8)^T \quad -\nabla f(\bar{x})^T d = 4 + 9/16 > 0$ Descent.

c) -

137. a) Brantaste lutning: $\quad x^1 = (1,83\ \ 2,44)^T \quad x^2 = (2,69\ \ 1,79)^T$.

b) Newton: $\quad x^1 = (3\ 2)^T$ Globalt minimum, ty konvex målfunktion.

138. a) $a = -1 \Rightarrow d_{BL} = (-2, -1)^T$, $d_N = (1, 1)^T$.
$a = 0 \Rightarrow d_{BL} = (0, 3)^T$, d_N existerar ej, ty H ej inverterbar.
$a = 1 \Rightarrow d_{BL} = (2, 1)^T$, $d_N = (1, 1)^T$.
d_{BL} är descentriktning i samtliga fall. d_N är descentriktning för $a = 1$.

b) f måste vara en kvadratisk och konvex funktion. f kvadratisk $\Rightarrow a = \pm 1$
$a = 1 \Rightarrow H(x)$ pos definit $\Rightarrow$ f(x) konvex. $a = -1 \Rightarrow H(x)$ neg definit $\Rightarrow$ f(x) konkav.

139. a) $\nabla f = (3x_1^2 + x_2,\ x_1 + 2(1 + x_2))^T$, $\nabla f(1/2,\ -1) = (-1/4, 1/2)^T$
$H = \begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $H \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Sökrikning: $d = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -7/4 \end{pmatrix} \quad \nabla f^T d = -9/40 < 0 \Rightarrow$ descent.

b) $det\ H = \begin{vmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1/12$

140. a) Ja, det är en ascentriktning, ty vinkeln mellan gradienten och d är spetsig (positiv skalärprodukt).

b) Den optimala steglängden blir 1/3.

141. a) $a > 9/8$

b) Nej, ty $d^T \nabla f > 0$.

c) $a = 2$

d) $a > 9/8$

142. Ja, substituera $y_1 = x_1 - 2$ och $y_2 = \sqrt{5}(x_2 + 6)$. Då får man funktionen $g(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ vars nivåkurvor är cirklar centrerade kring origo. Alla $\nabla g(y_1, y_2)$ pekar genom origo, där optimum antas. $y^* = (0\ 0)^T \Rightarrow x^* = (2\ -6)^T$.

143. -

144. a) $F(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\nabla F(x^0)|| = \sqrt{5}$, $x^1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\nabla F(x^0)|| = \dfrac{16}{27}$

b) Om $F(x)$ är gradienten för någon funktion $f : R^n \to R$ så fås $\nabla F(x) = \nabla^2 f(x)$, dvs Newtons metod för obegränsad optimering fås.

145. a) $d_b = (-2,\ 1)^T$

b) $d_N = (-5/11,\ 8/11)^T$

c) $\nabla f(\bar{x})^T d_N = -18/11 < 0 \Rightarrow$ avtaganderiktning.

146. Välj nya variabler $y = C^{1/2}(x - C^{-1}c) \Rightarrow \min \dfrac{1}{2} y^T y$

147. $x^0 = (0, 0)^T$, $x^*_{LP0} = (2, 2)^T$ LBD = -9

$x^1 = (2, 2)^T$ UBD = 3, $x^*_{LP1} = (2, 0)^T$ LBD = -1

$x^2 = (2, 1)^T$ UBD = 2, $x^*_{LP2} = (2, 0)^T$ (tex) LBD = 2

LBD = UBD STOPP!! Opt i $x^* = (2, 1)^T$, $f^* = 2$

148. a) $f(x^0) = 12 \Rightarrow UBD = 12$
Linjärisering $\Rightarrow \min z = 8x_1 + 22x_2 - 18 \Rightarrow x_{LP} = (0, 1)^T \Rightarrow$ LBD=4
Linjesökning $\Rightarrow t^0 = 1 \Rightarrow x^1 = (0, 1)^T \Rightarrow$ UBD=6

b) Problemet är konvext ty Hessianen är positivt definit för alla tillåtna punkter ($x_2 \geq 1$). Alltså är avvikelsen till optimala målfunktionsvärdet högst 2 (UBD – LBD).

149. -

150. a) -

b) $x^1 = (12/5,\ 4/5)^T \Rightarrow$ UBD $= f(x^1) = 8$

151. Använd Frank-Wolfe metoden. LP-relaxeringens värde z^*_{LP} är en undre gräns till f^*. Således blir $\bar{f} - z^*_{LP}$ en övre gräns till $\bar{f} - f^*$.
$\bar{f} = 0.375$. Målfunktionen till LP-relaxationen blir $-0.5x_1 - x_2 + 25/8$. Optimum till LP-problemet blir $x^*_{LP} = (2\ 2)^T$ som medför $z^*_{LP} = 1/8$. Alltså är den övre gränsen till $\bar{f} - f^*$ lika med $\bar{f} - z^*_{LP} = 1/4$.

152. $x = (1,\ -1)^T$, $f^* = 0$

153. $x^0 = (1/2\ 1/2)^T$, $y^0 = (0\ 1)^T$, $\quad 7/2 \le f^* \le 9/2$
$x^1 = (0\ 1)^T$, $y^1 = (2\ 0)^T$, $\quad 4 \le f^* \le 9/2$
$x^2 = (1/3\ 5/6)^T$, $y^2 = (0\ 1)^T$ eller $y^2 = (2\ 0)^T$, $\quad 25/6 \le f^* \le 25/6$
$x^* = (1/3\ 5/6)^T$ $f^* = 25/6$

154. a) $8/2 = 4$

b) $5\sqrt{2}$ (Riktningsderivatan ökar)

c) Linjesökning i riktningen $d^0 = \frac{1}{10}(1\ 1)^T$ ger $t = 25/3$. Steget får här vara längre än 1 men inte för långt ($t = 25/3$ är ej tillåtet). Ta så långt steg som möjligt, dvs $x^1 = (2/3\ 2/3)^T$. Ny LP lösning $x^{RLP1} = (17/30\ 43/60)^T$ ger $d^1 = (-1/10\ 1/20)^T$.

155. a) $x^0 = (3\ 1)^T$, $y^0 = (2\ 0)^T$, $d^0 = (-1\ -1)^T$, $t^0 = 1$ $(17/14 > 1)$
$x^1 = (2\ 0)^T$, $y^1 = (0\ 2)^T$, $d^1 = (-2\ 2)^T$, $t^1 = 1/4$
$x^2 = (3/2\ 1/2)^T$, $f^* = 4,25$.

b) $y = (4\ 0\ 0)^T$, $x = (3/2\ 1/2)^T$ är en KKT punkt.

156. Om $\bar{x}$ är ett lokalt optimum till det givna problemet och d är sådant att $Ad = 0$ så måste $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$, ty annars skulle det finnas en tillåten descentriktning i $\bar{x}$, vilket motsäger vårt antagande att $\bar{x}$ är lokalt optimum. Vi kan alltså dra slutsatsen att problemet

$$\begin{array}{ll} \min & \nabla f(\bar{x})^T d \\ \text{då} & Ad = 0 \end{array}$$

har optimalvärdet 0. Alltså har dess LP-dual en tillåten lösning, dvs det finns ett μ sådant att $A^T\mu = \nabla f(\bar{x})$. Med $\lambda = -\mu$ fås $\nabla f(\bar{x}) + A^T\lambda = 0$.

157. $\bar{x}_j^* = e^{-1-\lambda b_j}$, $j = 1, .., n$, där λ löser ekvationen $\sum_{j=1}^N b_j e^{-1-\lambda b_j} = b_0$.

158. $\bar{x}_j^* = \frac{\sum\sqrt{a_k b_k}}{b_0}\sqrt{b_j/a_j}$, $j = 1, .., n$.

159. $a \le 9/2$

160. a) KKT-villkoren ger $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \Leftrightarrow 3/2 \le c \le 12$

b) Optimalt för $c = 3/2$

161. a) -

b) $x^* = (11,\ 8)^T$ och $\lambda^* = (0,\ 6)^T$

162. a) -

b) Punkten $x = (0\ 1\ 2)^T$ är ett globalt optimum.

163. a) KKT-villkoren:

$$\begin{aligned} x_1 - 10x_2 + 2y_1 + 2y_2x_1 &= 0 \\ -10x_1 + 20x_2 + 2y_1x_2 - ay_2 &= 0 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2^2 &\leq 5 \\ x_1^2 - ax_2 &\leq 2 \\ y_1(2x_1 + x_2^2 - 5) &= 0 \\ y_2(x_1^2 - ax_2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$x = (2, 1)$ ger $a \geq 2$. För $a > 2$ erhålles ingen KKT-punkt. För $a = 2$ är KKT-villkoren uppfyllda och $y = (8/6\ 8/6)^T$.

b) Nej, ty problemet är ej konvext (undersök målfunktionen).

164. Jämför med optimalitetsvillkoren i LP-avsnittet.

165. Nej, punkten uppfyller ej Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

166. a) -

b) Punkten $(\epsilon,\ \epsilon)^T,\ \epsilon > 0$ ligger på ett godtyckligt litet avstånd från origo och har målfunktionsvärde $-\epsilon^2 < 0$, alltså kan inte origo vara lokalt minimum.

167. a) Ja, $\bar{x}$ är en KKT punkt

b) Nej, ty punkten $x = (2,\ 2)^T$ (tex) är tillåten och har ett bättre målfunktionsvärde. (Problemet är ej konvext).

168. a) Kontrollera att problemet är konvext, dvs att målfunktionen är konvex och att villkoren utgör en konvex mängd. Då är KKT villkoren tillräckliga för global optimalitet.

b) Om målfunktionen är *strikt* konvex och det tillåtna området är en konvex mängd erhålls ett *unikt* globalt optimum.

169. a) Villkoren uppfyllda med likhet, dvs primal tillåtenhet och komplimentaritet uppfyllt. $y = (152\ 12)^T$ ger dual tillåtenhet, alltså KKT punkt.

b) Linjära villkor är konvexa. $\bar{x}$ unik om $f(x)$ är strikt konvex. $x_1^4 + x_2^4$ strikt konvex. $f_2 = 12x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2$ är strikt konvex enligt Sylvesters kriterium. Summan av strikt konvexa funktioner är strikt konvex. $f(x)$ är strikt konvex $\Rightarrow \bar{x}$ unikt optimum.

170. a) i) Låt $S = \{x | g_i(x) = 0\ \forall i = 1, .., n\}$, och $G = R^n \Rightarrow S \subseteq G$ uppfyllt.

ii) För $\bar{x} \in S$ gäller $P(g(\bar{x})) = 0 \Rightarrow \pi_\rho(\bar{x}) = f(\bar{x}) \Rightarrow \pi_\rho(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$

(i) och (ii) uppfyllt $\Rightarrow$ problemet är en relaxering.

b) $x = (3/2\ 1)^T$ ger $f^* \geq 3$

171. a) x^* löser problemet $\min \nabla f(x^*)^T x$, då $x \in X \Rightarrow \nabla f(x^*)^T x \geq \nabla f(x^*)^T x^*,\ \forall x \in X \Rightarrow \nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0,\ \forall x \in X$

f konvex på $X \Rightarrow f(x^*) \geq f(x^*) + f(x^*)^T(x - x^*),\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq f(x^*),\ \forall x \in X \Rightarrow x^*$ löser $\min f(x)$, då $x \in X$ V.S.V b-d) -

172. a) Alla riktningar d sådana att $\nabla f(x)^T d < 0$ är descentriktningar.

b) Går ej att avgöra!

c) Eftersom det tillåtna området är samma i (P) och i LP-problemet, erhålles en UBD genom $f(x^{LP})$. LBD kan dock ej garanteras i det allmänna fallet. Men om $c = \nabla f(\tilde{x})$, för någon tillåten lösning $\tilde{x}$, då ger $f(\tilde{x}) + \nabla f(\tilde{x})^T(\bar{x} - \tilde{x})$ en LBD, om $\bar{x}$ är LP-lösningen.

173. -

174. a) $x^*_{LP} = (5/4,\ 1/2)^T$, $z^* = -19/4$

b) -

175. a) $L(x,u) = \min\limits_{x\in X} f(x) + u^T g(x)$

b) $\max_{u\geq 0} h(u)$ där $h(u) = \min_{x\in X} f(x) + u^T g(x)$

c) $h(u) = \min_{x\in X} f(x) + u^T g(x) \leq f(\bar{x}) + u^T g(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$
där första olikheten gäller pga att $\bar{x}$ är tillåten och den andra olikheten bygger på att $g(\bar{x}) \leq 0$ och $u \geq 0$ gäller då $\bar{x}$ tillåten.

176. Lagrange-relaxera och bestäm den duala målfunktionen

$$\varphi(\lambda,\mu) = \min_{x\geq 0}\{\sum\sum x_{ij}\ln(x_{ij}) + \sum \lambda_j(b_j - \sum x_{ij}) + \sum \mu_i(a_i - \sum x_{ij})\} =$$

$$= \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i + \min_{x\geq 0}\{\sum\sum x_{ij}(\ln(x_{ij}) - \lambda_j - \mu_i)\} =$$

$$= \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i + \min_{x\geq 0} h(x)$$

$h(x)$ konvex $\Longrightarrow$ Om $\nabla h(\hat{x}) = 0$ och $\hat{x} \geq 0$ så är $\hat{x}$ ett tillåtet globalt optimum.

$\frac{dh(x)}{dx_{ij}} = \ln(x_{ij}) - \lambda_j - \mu_i + 1 = 0 \Rightarrow x_{ij}(\lambda,\mu) = e^{\lambda_j + \mu_i - 1} (> 0)$

Duala problemet:

$$(D)\quad \begin{array}{l} \max \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i + \sum\sum x_{ij}(\lambda,\mu)(\ln(x_{ij}(\lambda,\mu)) - \lambda_j - \mu_i) = \\ \max \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i - \sum\sum e^{\lambda_j + \mu_i - 1} \\ \text{då } \lambda \in R^n \quad , \quad \mu \in R^m \end{array}$$

177. -

178. $h(u) = \min 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + u(24x_1 + 24x_2 - 360)$ då $x_3 \geq 1$
Separerar i ett problem för varje variabel. $x_1 = -2u$, $x_2 = -3u$ $x_3 = 1$.
$\max h(u) = -60u^2 - 360u + 1 \Rightarrow u = -3 \Rightarrow x = (6\ 9)^T$, $f(x^*) = 541$.

179. $h(1) = -11/2$ fås för $x = (1\ 3)^T$ och $h(2) = -4$ fås för $x = (1\ 2)^T$.
$h(u)$ är en undre gräns till f^* dvs $f^* \geq -4$.

180. a) $\lambda^* = 6/7,\quad x_1^* = 3/7,\quad x_2^* = 2/7,\quad f(x^*) = h(\lambda^*) = 3/7$

b) $\lambda_1^* = 8/3,\quad \lambda_2^* = 0,\quad x_1^* = 4/3,\quad x_2^* = 2/3,\quad f(x^*) = h(\lambda^*) = 8/3$

181. $\lambda = 1$: $x = (1\ 2)^T$ otillåten, $h(1) = 6$. $\lambda = 2$: $x = (1\ 5/2)^T$ otillåten, $h(2) = 43/4$. $\lambda = 3$: $x = (3\ 3)^T$ tillåten, $h(3) = 9$, $f(3,3) = 21$ $\quad 43/4 \le f(x^*) \le 21$.

182. $x_1 = \lambda + 1/2, \quad x_2 = \lambda, \quad h(\lambda) = -3\lambda^2 + 4\lambda - 1/2$

$\lambda^* = 2/3, \quad x_1^* = 7/6, \quad x_2^* = 2/3 \quad h(\lambda^*) = f(x^*) = 5/6$

183. $h(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{5} - 6\lambda - \frac{9}{2+3\lambda}$

$\lambda = 0$: $h(0) = -9/2$, $x = (3/2\ 0)^T$ otillåten. $\lambda = 1$: $h(1) = -8$, $x = (3/5\ 1/5)^T$ tillåten, $f(3/5, 1/5) = -67/25$. $-9/2 \le f(x^*) \le -67/25$

184. $\lambda = 0$: $x = (0\ 1\ 0)^T$ otillåten, $h(0) = 2$. $\lambda = 1$: $x = (2\ 1\ 1/3)^T$ otillåten $h(1) = 20/3$. $\lambda = 2$: $x = (2\ 1\ 2/3)^T$ tillåten $f(2,1,2/3) = 22/3$, $h(2) = 20/3$. $20/3 \le f(x^*) \le 22/3$.

185. Dualt problem: max $h(y)$, då $y \ge 0$ där $h(y) = -6y+$

$$+\left[\begin{array}{lcccccc} \min z_1 = (-1+y)x_1 + (-4+y)x_2 \\ \text{då} \quad 3x_1 & + & x_2 & \le & 6 \\ \quad -x_1 & + & x_2 & \le & 2 \\ \quad x_1 & , & x_2 & \ge & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{lcccccc} \min z_2 = (-1+y)x_3 + (-2+2y)x_4 \\ \text{då} \quad x_3 & - & x_4 & \le & 2 \\ \quad x_3 & + & x_4 & \le & 3 \\ \quad x_3 & , & x_4 & \ge & 0 \end{array}\right]$$

$y = 2 \Rightarrow x = (1,3,0,0)^T$ (tillåten) $f(x) = -13$ (UBD), $h(2) = -17$ (LBD)

Svar: $-17 \le f(x^*) \le -13$

186. Det Lagrange-duala problemet är $\max h(\lambda)$

$$\text{där } h(\lambda) = \min_x \{f(x) + \lambda_1(1 - x_1 - x_2) + \lambda_2(x_1 - x_2 - 3)\}$$

$\lambda = (0,0)^T$: $x = (1,-1)^T$ otillåten, $h(\lambda) = -3$. $\lambda = (1,1)^T$: $x = (1,0)^T$ tillåten, $f(x) = -2$, $h(\lambda) = -4$. $-3 \le f(x^*) \le -2$.

187. a) Variabler: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om båge } (i,j) \in A \text{ ingår i billigaste vägen} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = 1 \\ -1 & \text{om } i = m \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad \forall i \in N \\ & \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \le 14 \\ & x_{ij} \ge 0 \end{aligned}$$

b) $u = 0$: BV: 1–2–4–6, otillåten, LBD=3
$u = 3$: BV: 1–3–2–5–6, tillåten ($z = 15$), LBD=3
$u = 1$: BV: 1–2–5–6, otillåten, LBD=6
$u = 2$: BV: 1–2–5–6, otillåten, alt 1–3–2–5–6, tillåten ($z = 15$), LBD=7,

$u = 2$ är optimallösning till det duala problemet, och det bästa intervall för z^* som kan erhållas är [7,15]. (Optimum till det primala problemet är 1–3–2–4–6 med $z = 13$.)

188. Lagrange-relaxera kapacitetsvillkoren (andra bivillkorsgruppen) $\Rightarrow$ duala problemet $\max\limits_{u \geq 0} h(u)$ (u är multiplikatorvektorn) där den duala funktionen $h(u)$ ges av Lagrange-subproblemet

$$\begin{array}{ll} \min & \sum\limits_{k \in K} \sum\limits_{(i,j) \in B} (c_{ij} + u_{ij}) {x^k}_{ij} - \sum\limits_{(i,j) \in B} u_{ij} u_{ij} \\ \text{då} & Ax^k = d^k, \; k \in K \\ & {x^k}_{ij} \geq 0, \; k \in K, \; (i,j) \in B \end{array}$$

Problemet separerar i k st minkostnadsflödesproblem (ett för varje varutyp). Problemen löses växelvis, starta med givna u:n, lös Lagrange-subproblemet vilket ger en indikation på hur de nya u:na skall väljas. Multiplikatoruppdatering:

$$u_{ij}^{\text{ny}} = u_{ij} + \alpha * \underbrace{\Big(\sum_{(i,j) \in B} \Big(\sum_{k \in K} {x^k}_{ij} - u_{ij} \Big) \Big)}_{\substack{> 0 \to \text{öka } u_{ij} \\ < 0 \to \text{minska } u_{ij}}},$$

där α är en steglängd.

189. a)

$$\begin{array}{ll} f = \min & c^T x \\ \text{då} & x \in X \\ & \sum\limits_{i \in I} x_i \leq 3 \end{array}$$

där X är mängden av uppspännande träd och I mängden av bågar som ansluter till nod 1.

Lagrange-relaxation: $h(u) = \min\limits_{x \in X} c^T x + u(\sum x_i - 3)$

De bågar som ansluter till nod 1 kommer att få en ökad kostnad med u.

$h(0) = 60$, $h(8) = 76$ och $h(11) = 75$. $u = 11$ ger tillåten lösning med $f(\bar{x}) = 86$. Alltså $76 \leq f^* \leq 86$.

b) $u = 9$ ger flera alternativa minimalträd. Ett möjligt träd har valens = 2 och subradient = -1. Ett annat träd har valens = 4 och således subgradient = 1. $h(9) = c^T x + 9 \sum x_i - 9 \cdot 3 = 104 - 27 = 77$

c) GO :

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min\limits_{x \in X} f(x) + {u^*}^{\mathrm{T}} g(x) & (i) \\ {u^*}^{\mathrm{T}} g(x^*) = 0 & (ii) \\ g(x^*) \leq 0. & (iii) \end{cases}$$

Här: $g(x) = \sum x_i - 3$, $u^* = 9 > 0 \Rightarrow \sum x_i^* = 3$ ska gälla. Alltså: ett träd som löser relaxationen *och* har valens 3 utgör ett primalt optimum.

190. Om villkoren (1) relaxeras fås

$$\begin{aligned}
L(v) = &\quad \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - b_i) \\
= &\quad \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + v_i a_{ij}) x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} b_i v_i \\
\text{då} &\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,..,n \\
&\quad x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,..,m;\ j = 1,..,n
\end{aligned}$$

där $v_i \geq 0, i = 1,..,m$ är multiplikatorerna till de relaxerade bivillkoren (1). Problemet separerar i n stycken halvtillordningsproblem.

Om villkoren (2) relaxeras fås

$$\begin{aligned}
L(u) = &\quad \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} u_j (\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - 1) \\
= &\quad \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + u_j) x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} u_j \\
\text{då} &\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1,..,m \\
&\quad x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,..,m;\ j = 1,..,n
\end{aligned}$$

där $u_j, j = 1,..,n$ är Lagrange-multiplikatorerna till de relaxerade bivillkoren (2). Problemet separerar i m st kappsäcksproblem.

Halvtillordningsproblemet har heltalsegenskap, vilket *inte* gäller för kappsäcksproblem. Den första relaxationen ger alltså en optimistisk uppskattning som sammanfaller med LP-optimalvärdet, medan den andra relaxationen typiskt ger en starkare (högre) optimistisk uppskattning.

191. a) Låt $\bar{x}$ vara en godtycklig tillåten lösning. Då fås: $f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + u^{*T} g(\bar{x}) \geq \min_{x \in X} f(x) + u^{*T} g(x) = f(x^*) + u^{*T} g(x^*) = f(x^*)$. x^* dessutom tillåten $\Rightarrow x^*$ optimal.

b) Vi Lagrange-dualiserar det första villkoret och får

$$\begin{aligned}
h(u) = &\quad \min_{x \in X} \quad (x_1 - 3x_2) + u(-x_1 + 2x_2 - 6) \\
&\quad \text{då} \quad x_1 + x_2 \leq 5, x \geq 0.
\end{aligned}$$

Genom att använda proceduren i deluppgift a) får vi ett optimum i punkten $x^* = (4/3\ 11/3)^T$.

c) Ett unikt optimum $x(u^*)$ uppfyller $u^{*T} g(x(u^*)) = 0$ och $g(x(u^*)) \leq 0$. Då räcker det bara med att lösa (i) $\min_{x \in X} f(x) + u^{*T} g(x)$. Om $f(x)$ och $g(x)$ är strikt konvexa funktioner och mängden X konvex, då har det Lagrange-relaxerade problemet ett unikt opimum för varje $u \geq 0$.

192. a) $h(\bar{u}) = \min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^T g(x) \leq f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$

b) $\left.\begin{array}{l} h(\bar{u}) \leq f(x), \forall \text{ tillåtna } x \\ h(\bar{u}) = f(\bar{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}), \forall \text{ tillåtna } x \Rightarrow \bar{x} \text{ optimal.}$

$\left.\begin{array}{l} h(u) \leq f(\bar{x}), \forall \text{ tillåtna } u \\ h(\bar{u}) = f(\bar{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow h(u) \leq h(\bar{u}), \forall \text{ tillåtna } u \Rightarrow \bar{u} \text{ optimal.}$

c) $\bar{x}$ och $\bar{u}$ tillåtna och $f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) = \min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^T g(x) = h(\bar{u})$. Deluppgift b) ger då att $\bar{x}$ och $\bar{u}$ är optimala.

193.

$$\begin{array}{rllll} h(u) = 6u + & \max & (3-2u)x_1 + x_2 & + \quad \max & (2-u)x_3 + (1-2u)x_4 \\ & \text{då} & x_1 + 2x_2 \ \leq \ 1 & \quad\ \ \text{då} & x_3 - x_4 \ \leq \ 1 \\ & & x_1, x_2 \ \geq \ 0 & & x_4 \ \leq \ 2 \\ & & & & x_3, x_4 \ \geq \ 0 \end{array}$$

$h(1) = 8$, för 2 extrema lösningar: $\bar{x} = (1,0,1,0)^T$ och $\hat{x} = (1,0,3,2)^T$. $\bar{x}$ är tillåten medan $\hat{x}$ inte är tillåten i det ursprungliga problemet. Detta medför i det endimensionella fallet att $0 \in \partial h(1)$, som medför att $u^* = 1$ är optimal.

x lösningen kan erhållas mha komplementariet. $1(2x_1 + x_3 + 2x_4 - 6) = 0$ $\Rightarrow x_3 + 2x_4 = 4$ ($x_1 = 1$ optimal). Alla lösningar till det andra subproblemet uppfyller ekvationen $x_3 - x_4 = 1 \Rightarrow x^* = (1,0,2,1)^T$ där $z^* = 8$. Stark dualitet $z^* = h^*$.

194. a)

$$h(u) = -4u + \min_{x_1 \geq 0} \frac{1}{x_1} + ux_1 + \min_{x_2 \geq 0} \frac{4}{x_2} + ux_2$$

f strikt konvex och villkoren konvexa $\Rightarrow h$ differentierbar för alla u.

b) h differentierbar $\Rightarrow$ minimum för $\nabla h(u) = 0 \Rightarrow g(x(u^*)) = 0$. $x_1 = 1/\sqrt{u} <$ och $x_2 = 2/\sqrt{u}$. Sätt in i $x_1 + x_2 = 4$ och lös ut $u \Rightarrow u^* = 9/16$.

c) $h(u) = 6\sqrt{u} - 4u \Rightarrow u^* = 9/16$, $h^* = 9/4$.

d) $x^* = (4/3, 8/3)^T$, $f^* = 9/4$.

e) $f^* = h^* = 9/4$ Stark dualitet ty konvext problem.

195. a) Låt $X = \{x^1, \ldots, x^P\}$. Då är duala målfunktionen

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x) = \min_{1 \leq i \leq P} f(x^i) + u^T g(x^i),$$

där $f(x^i)$ är en konstant och $g(x^i)$ är en konstant vektor, dvs $h(u)$ är ett punktvis minimum av P linjära funktioner. Det innebär att $h(u)$ är styckvis linjär. Antalet segment som funktionen $h(u)$ kan vara uppbyggd av är maximalt P st.

b) Mängden X består av fyra punkter $\{(1100), (1001), (0110), (0011)\}$. Duala målfunktionen är

$$h(u) = \max\{13, 14 - 2u, 15 + u, 16 - u\} = \begin{cases} 16 - u & \text{om } 0 \leq u \leq 1/2, \\ 15 + u & \text{om } 1/2 \leq u. \end{cases}$$

c) Mängden X är en polytop och därför har X ändligt antal hörnpunkter. Beteckna mängden av alla hörnpunkter till X med $\bar{X}$. Eftersom $f(x)$ och $g(x)$ är linjära fuktioner vi vet att

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x) = \min_{x \in \bar{X}} f(x) + u^T g(x)$$

och vi kan använda deluppgift a). Största antalet segment är storleken av $\bar{X}$.

196. a)

$$h(u) = \min_{x \in X} -2x_1 + x_2 + u(x_1 + x_2 - 3)$$

Den duala funktionen byggs upp av sex linjära funktioner (en för varje punkt i X):

$$h(u) = \min\{-3u, 4 + u, 5u - 4, u - 8, 0, -3\}$$

Skärningen mellan segmenten $-3u$ och $u - 8$ ger $u^* = 2$ och $h^* = -6$. ($x^1 = (0,0)^T$ eller $x^2 = (4,0)^T$ lösning i det relaxerade problemet.)

$g(x^1) \leq 0 \;\Rightarrow$ tillåten, $g(x^2) \not\leq 0 \;\Rightarrow$ otillåten.

x^1 bryter mot ${u^*}^T g(x^*) = 0$ i optimalitetsvillkoren och x^2 bryter mot både ${u^*}^T g(x^*) = 0$ och $g(x^*) \leq 0$.

$x^* = (2,1)^T \Rightarrow f^* = -3 \Rightarrow$ Dualgap $f^* - h^* = 3$.

b)

$$h(u) = -3u + \min_{0 \leq x_1 \leq 4} (u-2)x_1 + \min_{0 \leq x_2 \leq 4} (u+1)x_2$$

Lösning: $u < 2 \to x_1 = 4$, $u > 2 \to x_1 = 0$ och $u = 2 \to 0 \leq x_1 \leq 4$, samt $x_2 = 0$, $\forall u \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} h(u) = u - 8 & 0 \leq u \leq 2 \\ h(u) = -3u & \qquad u \geq 2 \end{array}$$

$u^* = 2$, $h^* = -6$. Kompl. ger $x^* = (3,0)^T \to f^* = -6$. Alltså $h^* = f^*$, dvs inget dualgap.

197. a)

$$\begin{array}{rllll} h(u) = 6u_1 + 5u_2 + & \max & (5 - 3u_1 - 2u_2)x_1 + (7 - 3u_1 - 3u_2)x_3 \\ & \text{då} & x_1 + x_3 & = & 1 \\ & & x_1, x_3 & \in & 0/1 \\ \\ + & \max & (8 - 2u_1 - 3u_2)x_2 + (9 - 3u_1 - 4u_2)x_4 \\ & \text{då} & x_2 + x_4 & = & 1 \\ & & x_2, x_4 & \in & 0/1 \end{array}$$

Duala problemet: $\min_{u_1, u_2 \geq 0} h(u)$ med egenskaper: konvext, styckvis linjär, begränsad och ändlig.

b) $\bar{u} = (1,1)^T \Rightarrow x(\bar{u}) = (0,1,1,0)^T$, $h(\bar{u}) = 15$ är en övre gräns till z^*.

c) Subgradient i $\bar{u} = (1,1)^T$

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} g_1(x(\bar{u})) \\ g_2(x(\bar{u})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) $x = (0,1,1,0)^T$ är otillåten. Modifiera x. Sätt tex $x_1 = 1$ och $x_3 = 0$. $x = (1,1,0,0)^T$ är tillåten med $z = 13$, som är en undre gräns till z^*.

e) Tex Polyak $\lambda \frac{LBD - h(u)}{||\gamma||^2}$. LBD från uppgift d) kan utnyttjas.
Dualen minproblem $\Rightarrow$

$$u^{k+1} = u^k - \lambda \frac{LBD - h(u^k)}{||\gamma^k||^2} \gamma^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\frac{13-15}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

f) $h^* > f^*$ Dualgap uppträder troligtvis, ty ej konvext problem.

g) Lagrange-relaxeringen är minst lika stark (troligtvis bättre) än LP-relaxationen. [Notering: det visar sig att $h(0,2) = 13$. Dvs dualgapet blir 0 även fast problemet inte är konvex.]

198. a) -

b) -

c) $0 \in \partial h(u^*) \Rightarrow h(u) \leq h(u^*) + 0^T(u - u^*) = h(u^*), \ \forall\ u.$

d)

$$\begin{array}{rrl} h(u) = -6u + & \min & (1-u)x_1 + (-3+2u)x_2 \\ & \text{då} & x_1 + x_2 \ \leq \ 5 \\ & & x_1, x_2 \ \geq \ 0 \end{array}$$

$u^* = 4/3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rrl} h(u) = -8 + & \min & -1/3x_1 - 1/3x_2 \\ & \text{då} & x_1 + x_2 \ \leq \ 5 \\ & & x_1, x_2 \ \geq \ 0 \end{array}$$

Två extrema lösningar: $\bar{x} = (5,0)^T$ och $\hat{x} = (0,5)^T$.
(Alla lösningar: $x = \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x},\ 0 \leq \lambda \leq 1$.)

$\bar{x}$ ger upphov till subgradienten $\bar{\gamma} = g(\bar{x}) = -11$ och $\hat{x}$ ger upphov till $\hat{\gamma} = g(\hat{x}) = 4$. Subdifferentialen blir $\partial h(u^*) = [-11, 4]$.

u^* optimal ty $0 \in \partial h(u^*)$.

($x^* = (4/3, 11/3)$, $u^* = 4/3 \Rightarrow z^* = h^* = -29/3$ stark dualitet.)

199. a) Funktionen $h(u)$ är konkav. Låt γ^* vara en subgradient till $h(u)$ i u^*. Då har vi $h(u) \leq h(u^*) + \gamma^{*T}(u - u^*)$. Eftersom $\gamma^{*T}u \leq 0$ och $\gamma^{*T}u^* = 0$, får vi $h(u) \leq h(u^*)$ för varje u. Då följer att u^* är ett dualt optimum.

b) De två extrema subgradienterna till $h(u)$ är $(-11\ \ 2)^T$ och $(4\ \ -3)^T$. En subgradient till $h(u)$ i punkten u^* är t.ex. $\gamma^* = [4(-11\ \ 2)^T + 11(4\ \ -3)^T]/5 = (0\ \ -5)^T$ och u^* är optimum, eftersom $\gamma^* \leq 0$ och $u^{*T}\gamma^* = 0$.

200. a) Funktionen $\ln(1+x)$ är strikt konkav, eftersom $(\ln(1+x))'' = -1/(1+x)^2 < 0$. Målfunktionen är en positiv linjär kombination av strikt konkava funktioner, alltså också strikt konkav. Det implicita duala problemet är

$$\max_{u \geq 0} h(u), \text{ där } h(u) = \min_{x \geq 0} \ln \frac{1}{1+x_1} + 4 \ln \frac{1}{1+x_2} + 8 \ln \frac{1}{1+x_3} + u(x_1+x_2+x_3-4).$$

Definiera funktionen $z(x) = \ln \frac{1}{1+x_1} + 4 \ln \frac{1}{1+x_2} + 8 \ln \frac{1}{1+x_3} + u(x_1 + x_2 + x_3 - 4)$. Gradienten till denna funktion är $\nabla z(x) = (u - 1/(x_1+1), u - 4/(x_2+1), u - 8/(x_3+1))$. Minimum till $z(x)$, då $x \geq 0$ uppnås i en punkt där $\nabla z(x) = 0$, eller $x_i = 0$ om motsvarande x_i som vi får är negativt. Detta ger upphov till följande duala målfunktion

$$h(u) = \begin{cases} 13 \ln u - 7u - 32 \ln 2 + 13, & 0 \leq u \leq 1, \\ 12 \ln u - 6u - 32 \ln 2 + 12, & 1 < u \leq 4, \\ 8 \ln u - 5u - 24 \ln 2 + 8, & 4 < u \leq 8, \\ -4u, & 8 < u. \end{cases}$$

Undersökningen av $h(u)$ visar att $u^* = 2$ är lösning till $max_{u \geq 0} h(u)$. Optimum till det primala problemet är $x^* = (0\ 1\ 3)^T$.

b) Det primala problemet som vi betraktar är

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \geq 0} & \sum\limits_{j=1}^{n} (-f_j(x_j)) \\ \text{då} & \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \leq b. \end{array}$$

Antag att vi har hittat en optimal lösning u^* till det duala problemet. Då löser vi x^* ur

$$\min_{x \geq 0} \sum_{j=1}^{n} (-f_j(x_j) + u_j^* x_j).$$

Enligt deluppgift a) är gradienten till funktionen $z(x) = \sum_{j=1}^{n} (-f_j(x_j) + u_j^* x_j)$, $\nabla z(x) = (u_1^* - f_1'(x_1), \ldots, u_n^* - f_n'(x_n))$. Eftersom $-f_j'(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$ är strikt ökande funktioner av x_j (pga $-f_j''(x_j) > 0$) vi får $f_j'(x_j^*) = u^*$ för någon $x_j^* \geq 0$ eller $f_j'(x_j) = u^*$ för någon $x_j < 0$ och då $x_j^* = 0$ och $f_j'(0) \leq f_j'(x_j) = u^*$. Observera att marginalnyttan för aktivitet j är $f'(x_j^*)$.

201. a)

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{u \geq 0} & v \\ \text{då} & v \leq (b - Ax^i)^T u + c^T x^i, \ i = 1, .., P \end{array} = \begin{array}{ll} \max\limits_{u \geq 0} & v \\ \text{då} & v = \min\limits_{1 \leq i \leq P} (b - Ax^i)^T u + c^T x^i \end{array}$$

$$= \begin{array}{ll} \max\limits_{u \geq 0} & v \\ \text{då} & v = \min\limits_{x \in X} c^T x + u^T (b - Ax) \end{array} = \begin{array}{ll} \max\limits_{u \geq 0} & v \\ \text{då} & v = h(u). \end{array} = \max_{u \geq 0} h(u) = h^*.$$

b) Problemet definierat här är dual till problemet i deluppgift a). Det primala problemet har variablerna v (fria) och vektorn $u \geq 0$.

c) Vi kan skriva om problemet i b) som

$$\begin{array}{ll} \min & c^T \sum_{i=1}^{P} \lambda_i x^i \\ \text{då} & A \sum_{i=1}^{P} \lambda_i x^i \geq b \\ & \sum_{i=1}^{P} \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, P. \end{array}$$

Om vi definierar $x = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i x^i$, och $\sum_{i=1}^{P} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots P$ innebär det att x tillhör det konvexa höljet av X.

d) Mängden av alla hörnpunkter till X^c är en delmängd av X och $X \subseteq X^c$. Eftersom vi minimerar över större område har vi $h^* \leq z^*$.

e) Mängden X i detta fall är $\{x^1, x^2, x^3, x^4\} = \{(1100), (1001), (0110), (0011)\}$. Detta ger

$$\begin{array}{rll} h^* = & \max & 13\lambda_1 + 14\lambda_2 + 15\lambda_3 + 16\lambda_4 \\ & \text{då} & 5\lambda_1 + 7\lambda_2 + 4\lambda_3 + 6\lambda_4 \leq 5 \\ & & \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1 \\ & & \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 4, \end{array}$$

som har lösningen $\lambda = (0 \ 0 \ 1/2 \ 1/2)^T$ och $h^* = 31/2$.

f) Minimering av en linjär funktion över en polytop är ekvivalent med minimering av funktionen över polytopens hörnpunkter. I detta fall $X = X^c$ och $h^* = z^*$.

202. a) Heltalsegenskap innebär att alla hörnpunkter till det tillåtna området $\{x \mid Dx \leq e, x \geq 0\}$ är heltaliga. Exempel på heltalsegenskap är ett problem med tillåtet område $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$. Ett problem med tillåtet område $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 3/2, x \geq 0\}$ har inte heltalsegenskap.

b) Låt $h_{LP}(u) = \min c^T x + u^T(b - Ax)$, då $Dx \leq e$ och $x \geq 0$. Då är alltid $h(u) \geq h_{LP}(u)$. Vi har $h(u) = h_{LP}(u)$ om heltalsegenskap gäller. Vi har $h^*_{LP} = \max_{u \geq 0} \min_x c^T x + u^T(b - Ax)$, då $Dx \leq e$ och $x \geq 0$. Genom att LP-dualisera två gånger får vi att $h^*_{LP} = \min_x c^T x$, då $Ax = b$, $Dx \leq e$ och $x \geq 0$. Detta betyder att $h^* \geq h^*_{LP} = z^*_{LP}$.

c) Från deluppgift b) följer att $h^* = z^*_{LP}$ pga heltalsegenskap.

203. a) -

b) Den duala målfunktionen är styckvis linjär (ty det primala problemet är linjärt) och konkav, och det duala problemet är konvext. Dualitets-gap kan förekomma (ty det primala problemet är icke-konvext).

c) Öka transporten från de källor som har fri kapacitet i lönsamhetsordning.

d) $z^*_{LP} \le z^*_L$. Om det extra bivillkoret inte adderas gäller $z^*_{LP} = z^*_L$.

204. a) $g_i(x^*) \le 0$ och $u_i \ge 0$, $\forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x^*) \le 0 \Rightarrow x^*$ tillåten i (S). Alltså är $S(u) \le f(x^*) = z^*$, $\forall u \ge 0 \Rightarrow \max_{u\ge 0} S(u) \le z^*$.

Nytta: m stycken villkor har blivit ett villkor, dvs det nya problemet är (normalt) lättare att lösa och det ger en optimistisk uppskattning av z^*

b) $x_s = (1,1,0,0)$ ger $s(u) = 13$. $x_L = (1,1,0,0)$ ger $h(u) = 14$.

c) Det Lagrange-relaxerade problemet kan betraktas som en Lagrange-relaxering av surrogatproblemet, tillsammans med resultatet i a) följer svaret.

205. a) $x_1 = 1$ om a är sann och 0 om a är falsk
$x_2 = 1$ om b är sann och 0 om b är falsk
o.s.v.

Detta ger 5 villkor:

$$\begin{aligned}
x_1 + (1 - x_2) + x_3 + x_4 &\ge 1\\
(1 - x_1) + (1 - x_3) &\ge 1\\
x_2 + x_3 + x_4 &\ge 1\\
(1 - x_1) + x_2 + (1 - x_3) + (1 - x_4) &\ge 1\\
x_1 + x_2 + (1 - x_4) &\ge 1
\end{aligned}$$

Omskrivning av ekvationerna ger matriserna A och b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\\ -2\\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Man behöver bara hitta en tillåten lösning (ingen målfunktion finns). Inför en artificell målfunktion. Lös LP-problemet och förgrena över variabel med störst fraktionell del (två grenar $x_i = 1$ och $x_i = 0$). Finns det ingen tillåten LP-lösning i en gren kan denna gren kapas. Trädsökningen avbryts så fort en tillåten heltalig lösning hittats.

c) Målfunktionsvärdet för en tillåten lösning är 0 och för en otillåten lösning tex $+\infty$. Lagrange-relaxering: $h(\bar{u}) = \min_{x\in 0/1} \bar{u}^T(b - Ax)$

Om $h(\bar{u}) > 0$ för något $\bar{u} \ge 0$ kan man dra slutsatsen att ingen tillåten lösning existerar, ty $h(\bar{u}) \le 0^T x$.

206. Låt

$$f(x) = \max_{t\in T} \quad \{|f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t)|\}$$

$$f_L(x) = \max_{t\in T_m} \quad \{|f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t)|\}$$

där $T_m = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$.

a) Eftersom T_m är en delmängd av T är $f_L(x) \leq f(x) \Longrightarrow (P')$ är en relaxering av (P). Låt vidare $\hat{x}_L$ vara en optimallösning till (P') och p optimalvärdet i (P).

$$f_L(\hat{x}_L) = \leq p \leq f(\hat{x}_L) = \max_{t \in T}\{|f(t) - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{Lj} f_j(t)|\}$$

b)

$$\min x_0$$
$$(P'') \quad \text{då} \begin{cases} x_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i) \geq f(t_i) & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_0 - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i) \geq -f(t_i) & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$$

c)

$$\max \sum_{i=1}^{m} (\mu_i - v_i) f(t_i)$$
$$(D'') \quad \text{då} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (\mu_i + v_i) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{m} (\mu_i - v_i) f_j(t_i) = 0 & j = 1, 2, \ldots, n \\ \mu_i, v_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Eftersom det inte lönar sig att ha både μ_i och $v_i > 0$, så kan vi införa $\lambda_i = \mu_i - v_i$ med $|\lambda_i| = v_i + \mu_i$. Vi får följande maximeringsproblem:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(t_i)$$
$$\text{då} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_j(t_i) = 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

d) -

207. a) Ger ej otillåtenhet.

b) Ger ej otillåtenhet.

c) Kan ge en otillåten lösning.

d) Kan ge en otillåten lösning.

e) Ger ej otillåtenhet (under förutsättning att man valt en annan *tillåten* hörnpunkt).

208. a) Falskt b) Sant c) Sant d) Sant e) Sant f) Falskt

209. Nedan följer vinkar om svaren till frågorna. Det är *ej* fullständiga svar.

a) $f(x)$ strikt konvex, $g_i(x)$ konkava (det finns även andra möljigheter).

b) Fördel: snabb. Nackdel: första- och andraderivator krävs.

c) För att kunna avgöra om det är ett globalt optimum man finner.

d) $\min \sum_{i=1}^{m}(a_i(x))^2$ (det finns även andra möjligheter).

e) Någon basvariabel har värdet 0.

f) Man hittar ingen utgående variabel.

g) Det duala problemet saknar lösning.

h) I en liten omgivning är det lokala optimat den punkt som har bäst målfunktionsvärde.

i) Att man kommer tillbaka till en baslösning som man redan har besökt. Kan ej hända utan degeneration.

j) -

k) -

l) Nej, inte allmänt. Ja, om funktionen är konvex och deriverbar och man gör en tillräckligt exakt linjesökning.

210. a) Falskt, b) Sant, c) - d) Sant, e) Sant, f) Sant, g) Falskt, h) Sant, i) Sant, j) Falskt, k) Sant, l) Sant, m) Falskt, n) Sant, o) Falskt, p) Falskt, q) Sant, r) Falskt, s) Sant, t) Falskt, u) Falskt

211. a) Sant, b) Sant, c) Falskt, d) Sant, e) Falskt, f) Falskt, g) Sant, h) Falskt, i) Falskt, j) Sant, k) Sant, l) Falskt, m) Falskt