Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2023-01-03

Lösningar

Uppgift 1

1a: Tre bivillkor ger tre basvariabler. Eftersom både vanliga variabler och slackvariabler kan vara basvariabler, blir högst tre vanliga variabler större än noll. Det betyder att högst tre olika produkter kan ingå i optimallösningen. (Under förutsättning att man väljer en extrempunkt, vilket simplexmetoden alltid gör.)

1b: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-3	-2	-3	-1	0	0	0	0
x_5	0	3	3	5	2	1	0	0	20
x_6	0	2	3	4	2	0	1	0	15
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	4

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-2	-3	-1	0	0	3	12
x_5	0	0	3	5	2	1	0	-3	8
x_6	0	0	3	4	2	0	1	-2	7
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	4

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-1/5	0	1/5	3/5	0	6/5	84/5
x_3	0	0	3/5	1	2/5	1/5	0	-3/5	8/5
x_6	0	0	3/5	0	2/5	-4/5	1	2/5	3/5
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	4

Nu fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	1/3	1/3	1/3	4/3	17
x_3	0	0	0	1	0	1	-1	-1	1
x_2	0	0	1	0	2/3	-4/3	5/3	2/3	1
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	4

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$ med $z = 17$. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna. $y_1 = 1/3$, $y_2 = 1/3$, $y_3 = 4/3$, $v = 17$.

Svar i ord: Gör 400 elefanter, 100 venusar och 100 ljusstakar. Förtjänsten blir 17.

1c: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. De två första bivillkoren har samma skuggpris (ty $y_1 = y_2 = 1/3$), så att öka högerleden ger samma vinst.

1d: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - 3y_1 - 4y_2 = c_8 - 7/3 > 0$ om $c_8 > 7/3$. Försäljningspriset måste då vara högre än $8 + 7/3 = 31/3 \approx 10.333$.

1e: Se kurslitteraturen. Dualt bivillkor från ny variabel: $3y_1 + 4y_2 \geq c_8$. Med duallösning instoppad: $7/3 \geq c_8$.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,2), (2,3), (5,3), (5,4) och (6,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $y_3 = 14$, $y_4 = 11$, $y_5 = 7$, $y_6 = 5$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{15} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{16} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{16} = -2 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Välj x_{16} som inkommande, att öka. Cykeln blir 1-6-4-5-3-2-1, och maximal ändring blir 2. Det ger båge (5,4) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $y_3 = 14$, $y_4 = 9$, $y_5 = 7$, $y_6 = 3$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{15} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden sänks med $2 * 2 = 4$.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-3-4, med kapacitet 9. Skicka 9 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,4) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-6-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-5-4, med kapacitet 1. Skicka en enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,2) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1, så minsnittet går runt nod 1, dvs. över bågarna (1,2), (1,5) och (1,6) baklänges. Maxflödet är 21.

Uppgift 3

3a: Vi söker maximal matchning. Utökande väg: 1-4-2-3-5-9. Alternera matchningarna längs den vägen. Nu finns en omatchad nod, och bättre matchning kan inte fås eftersom antalet noder är udda. Bästa matchning: (1,4), (2,3), (5,9) och (7,8). Person 6 blir över.

3b: Nodfärgning. Grafen innehåller K3, en fullständig komponent med tre noder, så minst tre färger går åt. Det är lätt att hitta en färgning med tre färger, som alltså är optimal.

3c: Bågfärgning. Den maximala valens hos någon nod i grafen är 5 (nod 5), så minst fem färger går åt. Det är lätt att hitta en färgning med fem färger, som alltså är optimal.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 47.

Om man kör närmaste granne från nod 1, nås inte all noderna, men om man startar i nod 3, fås turen 1-2-3-4-5-6-7-8, med kostnaden 49. (Riktning på turen är oviktig.) Lösningen är alltså maximalt 2 enheter dyrare än optimum.

4b: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 1, 2, 3, 5, 6 och 7 har udda valens. De gator som ska köras mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det kommer alltså att krävas minst tre bågar. Det billigaste sättet att uppnå detta är med bågarna (1,2), (3,6) och (5,7). Dessa bågar bildar en perfekt matchning till dessa noder.

4c: Vi löser nu det kinesiska brevbärarproblemet, genom att dubblera ovanstående bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 125. En optimal tur är t.ex. 1-2-4-5-6-4-3-6-7-5-7-8-6-3-2-1-3-8-1. (Många andra möjligheter finns.)

4d: Det bästa vore att ta bort den dyraste gata som körs två gånger, i detta fall (5,7), vilket tar bort subturen 7-5-7 från turen, och minskar kostnaden med $2 * 7 = 14$.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Fords metod. Billigaste vägen: 1-2-3-6-5-7, kostnad 3.

5b: Om man gör ändringen och fortsätter med Fords metod, fås en negativ cykel, 3-6-5-2-3, med kostnaden -2. Det betyder att det inte finns någon billigaste väg, och att Palle kör runt ovanstående cykel oändligt många gånger.

Uppgift 6

6a: P0: LP-optimum: $x_1 = 0.5$, $x_2 = 3.5$, $z = 26$. Detta ger $\bar{z} = 26$. Vi förgrenar över x_1.
P1 = P0 $+(x_1 \leq 0)$.
P2 = P0 $+(x_1 \geq 1)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 \approx 3.667$, $z \approx 25.667$ vilket ger ger $\bar{z} = 25$. Förgrena över x_2.
P3 = P1 $+(x_2 \leq 3)$.
P4 = P1 $+(x_2 \geq 4)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z = 21$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 21$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: Saknar tillåten lösning. Kapa.

P2: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 3.25$, $z = 25.75$, vilket ger ger $\bar{z} = 25$. Förgrena över x_2. P5 = P2 $+(x_2 \leq 3)$.
P6 = P2 $+(x_2 \geq 4)$.

P5: LP-optimum: $x_1 = 1.5$, $x_2 = 3$, $z = 25.5$, vilket ger ger $\bar{z} = 25$. Förgrena över x_2.
P7 = P5 $+(x_1 \leq 1)$.
P8 = P5 $+(x_1 \geq 2)$.

P7: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $z = 24$, En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 24$. Spara lösningen och kapa grenen.

P8: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 2.75$, $z = 25.25$, vilket ger ger $\bar{z} = 25$. Förgrena över x_2.
P9 = P8 $+(x_2 \leq 2)$.
P10 = P8 $+(x_2 \geq 3)$.

P9: LP-optimum: $x_1 = 3.5$, $x_2 = 2$, $z = 24.5$, vilket ger ger $\bar{z} = 24$. Vi har nu $\bar{z} = \underline{z}$, och kapar grenen.

P10: Saknar tillåten lösning. Kapa.

P6: Saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $z = 24$. I ord: Köp en liten och tre stora bilar.

6b: Vi ska kräva att x_1 och x_2 inte båda är större än noll. Inför $y = 1$ om $x_1 > 0$ och $y = 0$ om $x_2 > 0$. Lägg till bivillkor $x_1 \leq 8y$, $x_2 \leq 4(1-y)$ samt $y \in \{0, 1\}$.

Fast i parktiken kan man först lösa problemet med $x_2 = 0$ och sedan med $x_1 = 0$, och ta den bästa av dessa lösningar. Vi får lösningarna $x_1 = 7$, $x_2 = 0$ med $z = 21$, och $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ med $z = 21$. De är alltså lika bra.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 4, 4, 5, 4)$ och $\beta = (0, 2, 0, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 5, samt kolumn 1 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 5, 5, 6, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, -1)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får (till exempel) lösningen $x_{13} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{52} = 1$, och total kostnad blir 25. Optimal duallösning är $\alpha = (5, 5, 5, 6, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, -1)$. Summering av duallösningen ger 25, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Den primala lösningen är inte unik. Man kan byta positionerna (1,3) och (4,4) mot (1,4) och (4,3).

Den duala lösningen är aldrig unik. (Man kan addera valfri konstant till α och β.)