Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	3 januari 2023
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Pryttel måste lägga om produktionen. Många råvaror har blivit alldeles för dyra, och man tror att man skulle förlora många av sina kunder om man höjde priserna så mycket som skulle krävas för att gå med vinst.

De nya produkterna listas nedan, med råvarukostnad och försäljningspris. Det finns två begränsande bivillkor, nämligen maskintid och lagringsplats. Den tid och plats varje produkt kräver listas i tabellen. Alla siffror gäller per hundra enheter och månad. Den totala maskintiden får inte överstiga 20 och den totala lagringsplatsen får inte överstiga 15. Man vill inte göra mer än 400 elefanter.

Vara	Råvarukostnad	Försäljningspris	Maskintid	Lagringsplats
Elefant av lera	7	10	3	2
Venus av porslin	10	12	3	3
Ljusstake av gjutjärn	12	15	5	4
Tomte av garn	5	6	2	2

Man vill finna den produktmix (dvs. hur många av varje sort) man ska göra per månad. Målfunktionen är att maximera försäljningspriset minus råvarukostnaden. Optimeringsmodellen för detta blir följande, med variablerna x_j som är hur många hundra enheter av produkt j man gör.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & \leq & 20 & (1) \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 15 & (2) \\
& & x_1 & & & & & & & \leq & 4 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Det råder delade meningar om hur många olika sorter det blir optimalt att göra. Några tror att det blir alla fyra, några att det bara kan bli tre, och några att det bara kan bli två. Avgör hur det är med den saken genom att hänvisa till egenskaperna hos en optimallösning till ett LP-problem. (Motivationen får inte bygga på lösningen i uppgift b.) (1p)

b) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. (3p)

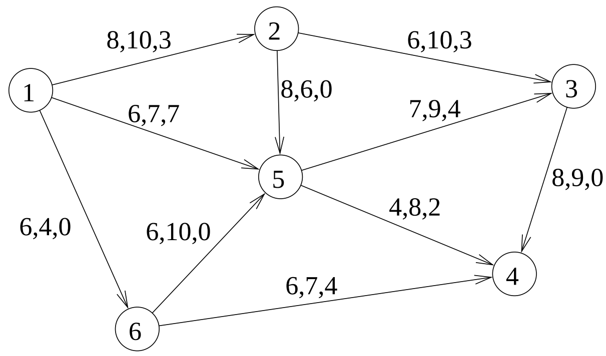
c) Utgå från optimallösningen i uppgift b. Om man kunde öka tillgänglig maskintid eller lagringsplats, vilket skulle man tjäna mest på? Motivera. (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift b. En julgransstjärna av plast skulle kräva 3 enheter maskintid och 4 enheter lagringsutrymme. Råvarukostnaden är 8. Vad skulle försäljningspriset behöva vara för att man skulle tjäna på att producera sådana? (1p)

e) Formulera LP-dualen till LP-problemet. Ange dualvariablernas ekonomiska tolkning. Visa att den duala lösningen i uppgift b är tillåten samt att starka dualsatsen är uppfylld. Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift d. Stoppa in den duala lösningen och visa att resultatet verifierar svaret i uppgift d. (3p)

Uppgift 2

Pryttel har några varulager som levererar till stormarknader. I följande nätverk har man 10 containrar i nod 1 och 4 i nod 6. Man ska leverera 7 till nod 3, 6 till nod 4 och en till nod 5. Transporterna ska ske med tåg, och nätverket visar möjliga vägar. Kostnaderna är linjära, och koefficienterna i nätverket anger kostnad per container. Dessutom finns en övre gräns på varje båge för hur många som kan skickas den vägen. Till sist anges flöde i en tidigare beräknad lösning.



a) Kontrollera om lösningen som anges i nätverket är optimal. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. (2p)

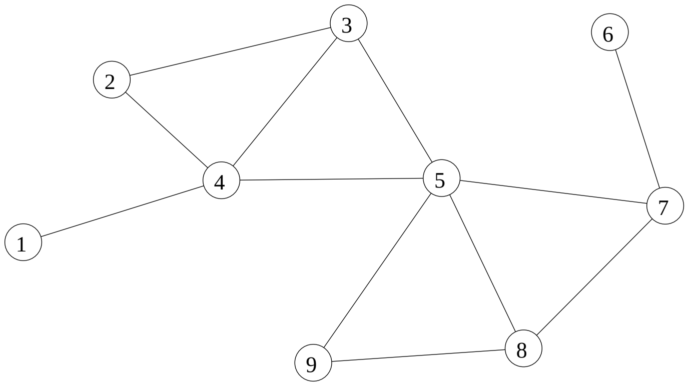
b) En prisändring gör att kostnaden på båge (1,6) sänkts till 3. Beräkna nytt optimal flöde. Hur mycket sänks den totala kostnaden? Starta från optimallösningen i uppgift a. (2p)

c) I framtiden planerar man att utöka samarbetet med stormarknaden i nod 4. Hur mycket skulle man maximalt kunna transportera från nod 1 till nod 4? Vilka bågar begränsar maxflödet? Använd standardmetod och starta med flöde noll i alla bågar. Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 3

a) Pryttels VD läser i en artikel att folk jobbar bättre i par, så nu ska det införas på försök i packningsavdelningen. Men det krävs att de två som ska samarbeta verkligen fungerar bra ihop. Därför låter ledningen göra en graf, där varje nod motsvarar en person, och en båge dras mellan två personer som kan samarbeta bra. Ledningen blir lite bekymrad när det visar sig att grafen blir ganska gles. Vissa personer har ganska få de skulle kunna samarbeta med.

Vilket optimeringsproblem är det att finna en parbildning där så många som möjligt ingår? Lös problemet i följande graf med lämplig metod. Starta med paren (2,4), (3,5) och (7,8). Beskriv stegen i metoden. Är man säker på att optimum fås? (3p)

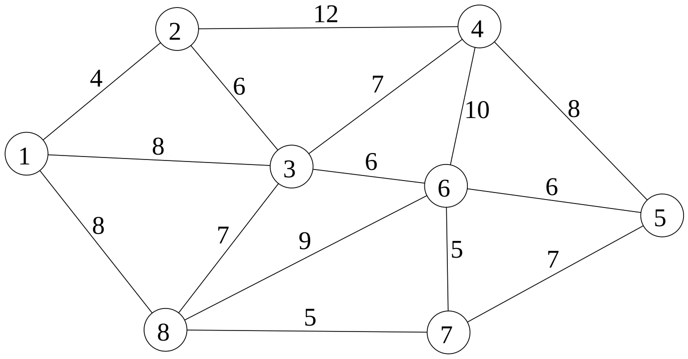


b) För att underlätta framtida parbildning, vill ledningen ge varje person en färg, så att personerna i varje möjligt par får olika färger. Man vill använda så få färger som möjligt. Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en optimistisk och en pessimistisk gräns för det optimala antalet färger. (1p)

c) Ett alternativ till uppgift b vore att istället ge en färg till varje möjligt par, men då måste alla möjliga par för samma person få olika färger. Man vill använda så få färger som möjligt. Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en optimistisk och en pessimistisk gräns för det optimala antalet färger. (1p)

Uppgift 4

a) Pryttel bestämmer sig för att köra ut sina varor med sin nyinköpta skåpbil. Från lagret i nod 1 i följande nätverk ska man köra ut varor till kunderna i alla andra noder. Man vill köra i en rundtur som kommer tillbaka till nod 1 till slut. Koefficienterna på bågarna anger tiden det tar att köra, och man vill helt enkelt finna den snabbast rundturen.



Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Beskriv heuristiken. Finn en optimistisk uppskattning av tiden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

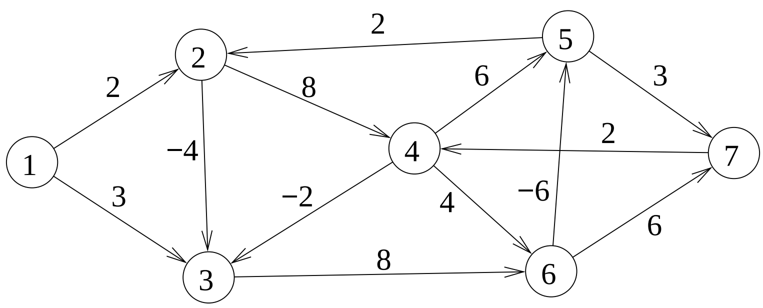
b) En dag kommer snö, och alla gatorna i ovanstående graf måste plogas. Man tänker sig att en snöplog ska starta i nod 1, ploga samtliga gator och sluta i nod 1. En person påstår att man kommer att behöva köra en gång extra på tre gator. Stämmer det och varför? Vilken typ av grafstruktur kommer de tre gatorna att bilda? (1p)

c) Vilket optimeringsproblem är det att finn en snabbaste rundtur för snöplogen i uppgift b? Finn en optimallösning. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. (3p)

d) Man kan minska den totala snöröjningstiden genom att låta bli att röja en gata. Vilken gata vore bäst att hoppa över? Hur ändras optimallösningen? (1p)

Uppgift 5

a) Pryttel ska göra en specialleverans till en julmarknad i en större stad. Lagret ligger i nod 1 i följande nätverk och julmarknaden ligger i nod 7. I grafen visas möjliga vägar. På bågarna ges en kostnadskoefficient som avspeglar en “kostnad” för att köra bågen, vilket baseras på avstånd men också en subjektiv upplevelse för föraren. Vissa vägar är vackra, och kan upplevas som en njutning att köra, vilket skulle motsvara en negativ kostnad. Finn en väg med minst totalkostnad, med lämplig metod. (2p)



b) Palle, som kör bilen som gör leveransen, kan tänka sig att bryta mot hastighetsbegränsningen på båge (3,6), för han vet att det inte finns en fartkamera där. Hur påverkas bästa vägen om han lyckas sänka kostnadskoefficienten med två enheter? (1p)

Uppgift 6

a) Pryttel expanderar sin verksamhet, och funderar på att köpa in flera varubilar.

Det finns två storlekar man tänker sig, en liten skåpbil och en större. Man sätter upp följande optimeringsproblem för att finna bästa lösning. x_1 är antal små bilar och x_2 är antal stora. Målfunktionen speglar förväntad nytta av dem, baserat på hur mycket som får plats i dem. Bivillkoren bygger på begränsat utrymme i garaget, samt begränsad budget. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 3x_1 + 7x_2 \\
\text{då} & & 2x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
\text{då} & & 2x_1 + 6x_2 \leq 22 \\
& & x_1 \geq 0, \text{heltal} \\
& & x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

b) De små och stora bilarna är av olika fabrikat, och kräver olika kompetens vid service. Därför bestämmer man att man bara vill ha en sort. Hur förändras den matematiska modellen av detta? Hur förändras optimallösningen? (1p)

Uppgift 7

Pryttel har nu blivit jättestora, och har, förutom huvudkontoret i Sverige, nyöppnade lokalkontor i Norge, Danmark, Finland, Estland och Lettland. Nu ska kontorschefer utses. Man har fem bra sökande, så det enda som återstår är att fördela dem på de olika kontoren.

Man gör en utredning och tar fram en kostnadskoefficient för att placera varje person på varje kontor, baserat på lokalkännedom, språkkunskaper och ledaregenskaper. Utplaceringen ska ske så att de totala kostnaderna minimeras. Raderna står för personer och kolumnerna står för de olika kontoren, i ovan nämnd ordning.

$$
C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 8 & 6 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}
$$

a) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Är den primala optimallösningen unik? Är den duala optimallösningen unik? Motivera. (1p)