Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	25 augusti 2023
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Pjotr har köpt ett gammalt torp ute i skogen. Där finns flera buskar med röda och svarta vinbär, samt massor av smultron och hallon. Han upptäcker att röda och svarta vinbär, smultron och hallon är extrema färskvaror. Han vill gärna sälja dem på en närbelägen marknad, men inser att de måste vara nyplockade. Marknaden äger rum en gång i veckan under sensommaren, och Pjotr funderar på hur mycket han ska plocka inför en marknad. Han lägger allt han skördar i små påsar av samma storlek. Det blir mycket plockande med småpåsar, så han bestämmer sig för att sälja flerpack av påsar. Han tänker sig att göra tre olika flerpack med följande innehåll.

De tre blandningarna han tänker sig är följande:
1. 3 påsar röda vinbär, 3 påsar svarta vinbär, 2 påsar smultron.
2. 2 påsar röda vinbär, 2 påsar svarta vinbär, 2 påsar smultron, 2 påsar hallon.
3. 1 påse röda vinbär, 3 påsar smultron, 1 påse smultron, 3 påsar hallon.

Denna gång har skörden räckt till 12 påsar röda vinbär, 18 påsar svarta vinbär, 6 påsar smultron och 10 påsar hallon.

Frågan är hur många av varje flerpack han ska göra. Han formulerar följande linjära optimeringsmodell, där x_j anger antal flerpack av sort j. Målfunktionen är förväntad vinst. Han antar att efterfrågan är obegränsad. Han vet att han inte säkert kommer att få en heltalig lösning, men accepterar det. Han tänker försöka realisera delar av flerpack genom att göra några lite mindre.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12 & \quad (1) \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 18 & \quad (2) \\
 & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6 & \quad (3) \\
 & & & & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 10 & \quad (4) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om Pjotr kunde skörda lite mer av någon bärsort, vilket skulle han tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Skulle en fjärde sorts flerpack, med 4 påsar röda vinbär och 4 påsar svarta vinbär, med förväntad vinst 3, förbättra lösningen? Motivera. (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Vad skulle en femte sorts flerpack, med 4 påsar smultron och 4 påsar hallon, behöva ha för förväntad vinst för att den skulle förbättra lösningen? Motivera. (1p)

e) Formulera LP-dualen till LP-problemet. Visa att den duala lösningen i uppgift a är tillåten samt att starka dualsatsen är uppfylld. Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift d. Stoppa in den duala lösningen och visa att resultatet verifierar svaret i uppgift d. (3p)

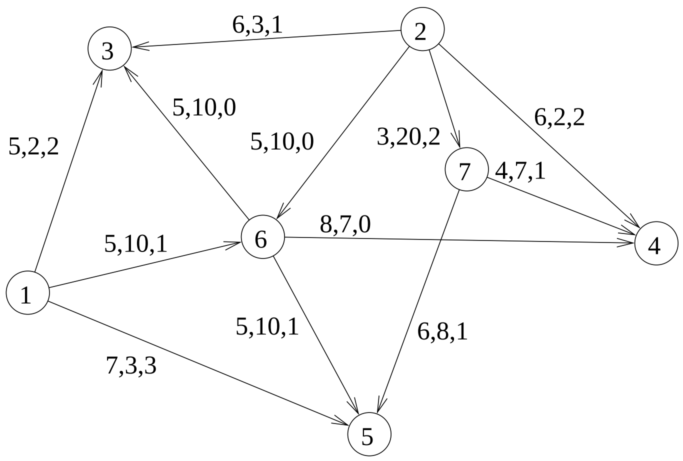
Uppgift 2

Pjotr har en granne, Vlad, som har en stor gård. Vlad odlar allt möjligt, och säljer på samma marknader som Pjotr, och Vlad börjar se Pjotr som en konkurrent. Vlad har samarbetat med flera mindre gårdar, men nu har flera blivit missnöjda med arrangemanget, och avslutat samarbetet med Vlad. Istället börjar de samarbeta med Pjotr. Man börjar sälja sina varor till flera ställen. En viss vecka ställs de inför följande transportproblem. Varorna finns på gårdarna i nod 1 och 2 och ska forslas till marknaderna i nod 3, 4 och 5.

Detta ska göras med tåg och/eller buss. Noderna 6 och 7 motsvarar omlastning mellan tåg och buss. På bågarna anges kostnad per paket, samt en övre gräns för hur många paket som kan skickas den vägen. (Både buss och tåg har begränsat lastutrymme.)

I nod 1 finns 6 paket och i nod 2 5 paket. Man vill få 3 paket till nod 3, 3 paket till nod 4 och 5 paket till nod 5.

På bågarna anges också ett föreslaget sätt att skicka paketen.



a) Kontrollera om lösningen som anges i nätverket är optimal. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. (2p)

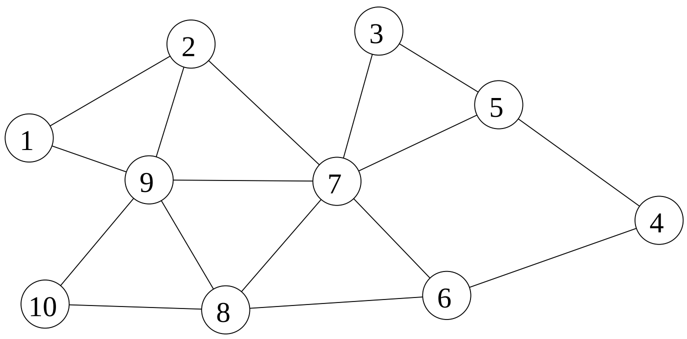
b) Ett avtal med en transportör möjliggör att kostnaden på båge (6,4) sänks från 8 till 2. Beräkna nytt optimal flöde. Hur mycket sänks den totala kostnaden? Starta från optimallösningen i uppgift a. (2p)

c) Det finns möjligheter att odla mycket mer i nod 1. Hur mycket skulle man maximalt kunna transportera från nod 1 till nod 5? Vilka bågar begränsar maxflödet? Lös problemet med standardmetod. (Starta med flöde noll i alla bågar.) Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 3

När de största odlingarna ska skördas krävs det att alla samarbetar i par. En person bär korgen för bären, och den andre plockar. Men alla kan inte samarbeta med alla. Ett par bör bestå av en äldre och en yngre person, en erfaren och en oerfaren, och de bör vara av olika storlek, så att de kan hjälpas åt med att nå bären. Det visar sig vara svårt att få ihop bra par.

Pjotr gör en graf över vilka personer (noder) som kan bilda par med vilka andra (representerat av med bågar).



a) Vilket känt optimeringsproblem är det att finna par så att alla eller så många som möjligt kan hjälpa till? Finn en lösning med lämplig metod. Man hade tidigare en lösning utan personerna 1, 4 och 10, nämligen paren (2,9), (7,8) och (3,5), där person 6 blev utan. Starta med dessa par, och utöka lösningen metodiskt. Visa stegen i metoden. Kommer alla med i ett par? (3p)

b) Pjotr misstänker att vissa är onödigt kräsna med vilka de kan samarbeta med, och ber alla att istället ange en kostnad för att samarbeta med varje person. Han vill nu hitta en parbildning med minsta totala kostnad. Vad är det för optimeringsproblem? Spelar det någon roll om grafen är tudelad? (1p)

c) Pjotr bestämmer sig för att ge varje person en viss färg, så att de som kan samarbeta med varandra får olika färger. Han vill använda så få färger som möjligt. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i ovanstående graf. (1p)

d) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en bågfärgning med minimalt antal färger i ovanstående graf. (1p)

Uppgift 4

Pjotr funderar på att plantera flera bärbuskar för att utöka sin försäljning. Hur många ska han välja av varje sort? Han sätter upp följande optimeringsproblem för att finna vilken blandning som vore bäst. x_1 är antal buskar med röda vinbär och x_2 är antal buskar med svarta vinbär. Målfunktionen speglar förväntad skörd, viktat med hur bra han tror att de säljer. Bivillkoren bygger på begränsat utrymme, begränsad budget, samt olika förutsättningar för god tillväxt. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

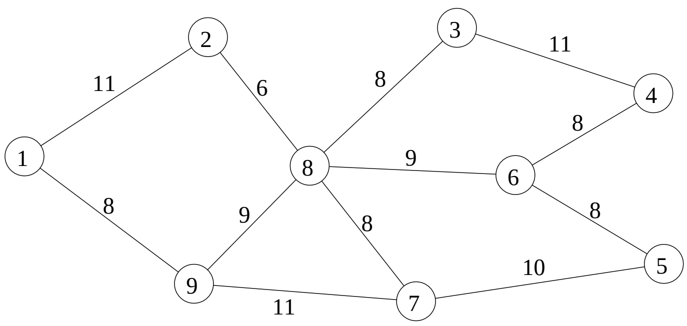
$$
\begin{array}{rrl}
\max & z = & 6x_1 + 8x_2 \\
\text{då} & & 3x_1 + 5x_2 \leq 17 \\
& & 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\
& & 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
& & 0 \leq x_1 \leq 5, \text{heltal} \\
& & 0 \leq x_2 \leq 5, \text{heltal}
\end{array}
$$

b) Hur påverkas lösningen om Pjotr vill ha minst två av varje sort? (1p)

Uppgift 5

Pjotr upptäcker att det försvinner bär och annat under nätterna. Det kan vara rådjur, grävlingar eller kanske den otrevlige grannen Vlad. I vilket fall som helst behöver Pjotr inspektera odlingarna med jämna mellanrum. Han bestämmer sig för att gå en runda varannan timme under natten.

Följande nätverk avbildar vägarna han kan gå bland sina odlingar. Han vill gå en rundtur som täcker samtliga bågar i nätverket, och turen ska vara så kort som möjligt. På bågarna står avstånd. Nod 1 är Pjotrs hus.



a) Vilket optimeringsproblem är detta? Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (3p)

b) Pjotr köper en starkare ficklampa, så att han kan inspektera alla odlingarna från korsningarna, dvs. noderna i nätverket. Det betyder att han bara behöver gå en rundtur som passerar varje nod (en gång). Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av tiden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. Hur mycket kortare sträcka behöver Pjotr gå p.g.a. sin ficklampa? (3p)

Uppgift 6

Fejden med Vlad intensifieras. Pjotr upptäcker att det försvinner ännu mer bär och annat under nätterna. Han inser att han bör vakta sina odlingar under natten. Hans fru och tre barn ställer upp och hjälper till. De bygger en koja på en kulle så att man kan se nästan hela odlingen från den. Pjotr vill att en person sitter i kojan och vaktar hela natten. Han vill göra en tidsplanering. De olika personerna har olika preferenser om att vara vaken olika delar av dygnet, så Helmer sätter upp en matris med kostnader för de olika personerna att ta de olika passen. Planeringen ska givetvis minimera de totala kostnaderna. Raderna står för olika tidspass, klockslagen anges till vänster, och kolumnerna står för olika personer.

$$C = \begin{pmatrix} \text{kl 20-22:} & 5 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ \text{kl 22-24:} & 4 & 4 & 7 & 6 & 8 \\ \text{kl 0-2:} & 9 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ \text{kl 2-4:} & 11 & 12 & 15 & 8 & 12 \\ \text{kl 4-6:} & 14 & 14 & 13 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) När lösningen är framtagen, tycker Pjotr att han borde ta ett större ansvar, och minskar alla kostnader i sin kolumn, kolumn 1, med 3. Samtidigt ökar han kostnaderna i kolumn 5, det yngsta barnet, med 3. Hur påverkas primal och dual optimallösning av detta? Hur ändras det optimala målfunktionsvärdet? (Lös inte om problemet.) (1p)

Uppgift 7

a) Pjotr hittar ett släktträd på nätet. I släktträdet hittar han en Vlad III (Tepes) Draculea som levde 1431-1476 i Transsylvanien. Pjotr undrar om den besvärlige nutida grannen Vlad kan vara släkt med denna person. Det verkar vara ungefär 40 generationer mellan de två. Pjotr funderar på hur många förfäder man har på 40 generationer. I första steget 2 (mamma och pappa), nästa steg 4 och så vidare, dvs. efter 40 steg 2^{40}, vilket är 549 755 813 888. Om man summerar alla nivåerna blir det 1 099 511 627 774. Pjotr har ett program som finner billigaste väg i en graf, men tvivlar på att det skulle klara av så många noder. I och för sig innehåller inte trädet alla släktingar 40 generationer tillbaka, men det är ändå många.

Problemet Pjotr vill lösa är att givet en startperson (nutida Vlad) och en slutperson (dåtida Vlad) samt en graf med alla förfäder till nutida Vlad (mamma och pappa och deras mammor och pappor etc.) se om det finns en väg mellan de två. Om man förutsätter att inga släktingar har gift sig och skaffat barn är grafen ett träd.

a) Beskriv en algoritm som löser problemet, och utnyttjar att grafen är ett träd. Ange tidskomplexitet samt hur mycket minne som krävs. Illustrera algoritmen på ett mindre exempel med fyra generationer. (3p)

b) Hur förändras ovanstående om det förekommer att (avlägsna) släktingar skaffar barn tillsammans? (1p)