Dynamisk programmering

Betrakta ett lagerhållningsproblem i flera tidsperioder.

Vi har tillverkning och försäljning av produkter i varje tidsperiod.

Dessutom kan vi lagra produkter mellan tidsperioder, för att utnyttja stordriftsfördelar i produktionen.

Antag att försäljningen är given i varje period.

Variabler blir då hur mycket vi ska tillverka varje period,
och (som följd av det) hur mycket vi ska lagerhålla mellan perioderna.

Dynamisk programmering

Beteckningar: d_k är försäljningen i period k.
Variabler: x_k är antal tillverkade produkter i period k.
s_k är antal enheter som lagerhålls från tidsperiod k till tidsperiod $k+1$.

Vi får bivillkor som säger att:
ingående lager + tillverkad mängd = försäljning + utgående lager:

$$s_{k-1} + x_k = d_k + s_k \quad \text{för alla } k$$

Om man har många tidsperioder, kan det bli svårt att lösa hela problemet på en gång.

Dynamisk programmering

Utnyttja tidsstrukturen: Tiden går bara framåt.

Betrakta en viss tidsperiod: Optimeringen handlar om hur mycket vi ska tillverka den perioden.

Om man inte tillåter något lager, har vi ett lätt optimeringsproblem för varje tidsperiod.

Likaså, om lagernivåerna är givna, har vi ett lätt optimeringsproblem för varje tidsperiod.

Slutsats: Lös för alla värden på lagernivåerna.

Dynamisk programmering

Antag att $s_0 = 0$, dvs. att vi inte har något i lager innan första tidsperioden.
Då kan vi lösa optimeringsproblemet i period 1 för alla möjliga värden på s_1, dvs. beroende på önskat lager efter period 1.
Alltså:
Finn optimal produktion om $s_1 = 0$.
Finn optimal produktion om $s_1 = 1$.
Finn optimal produktion om $s_1 = 2$.
Finn optimal produktion om $s_1 = 3$.
osv.
upp till $s_1 =$ maximalt lager.
Detta ger en optimal kostnad för varje lagernivå.

Dynamisk programmering

I period 2 har vi inget givet värde på s_1.

Det kan då finnas flera sätt att uppnå en viss lagernivå s_2.

Välj det billigaste av dessa.

Kostnaden blir tillverkningskostnaden aktuell period
plus kostnaden för tidigare perioder.

Man behöver inte veta exakt hur kostnaden för föregående perioder uppstod.

Dynamisk programmering

Nya beteckningar:

Låt s_k, lagernivån efter period k, kallas "tillstånd".

Vi ska bestämma optimal "styrning" (x_k) för varje tillstånd.

Låt $f_k(s_k)$ vara kostnaden för att uppnå tillstånd s_k i tidsperiod k.

Låt $c_k(x_k, s_k)$ vara kostnaden för att tillverka x_k enheter i period k och att lagerhålla s_k enheter till nästa period.

När vi ska optimera i steg k, vill vi alltså lösa

$$f_k(s_k) = \min_{x_k} \left(c_k(x_k, s_k) + f_{k-1}(s_{k-1}) \right)$$

där $s_{k-1} = s_k - x_k + d_k$ (ty $s_k = s_{k-1} + x_k - d_k$). (Så s_{k-1} beror på x_k.)

Vi fixerar alltså s_k och beräknar det bästa värdet på x_k.

Detta görs för varje möjligt värde på s_k.

Dynamisk programmering

För varje tidsperiod k görs följande:

För varje möjligt värde på s_k beräknas $f_k(s_k)$, vilket är det billigaste sättet att uppnå tillstånd s_k.

Detta ger ett optimalt värde på x_k för varje värde på s_k.

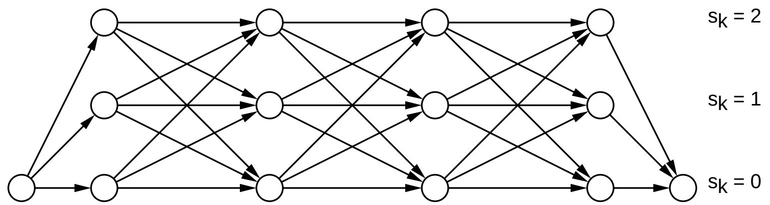
Kopplingen till föregående tidsperioder sker via "överföringsfunktionen":
$s_{k-1} = s_k - x_k + d_k$.

När man är färdig, nystas optimal lösning upp bakifrån.

Det får bara finnas ett tillåtet sluttillstånd.

Dynamisk programmering

Man kan rita upp det som en nivåindelad acyklisk graf.



Varje nivå motsvarar starten på en tidsperiod.

I varje nivå ges varje tillstånd av en nod.

Bågarna går alla framåt i tiden, och avspeglar möjliga förändringar i lagernivån.

Optimallösningen är helt enkelt en väg genom detta nätverk.

Dynamisk programmering

Detta angreppssätt kan användas på allt som kan beskrivas med ett acykliskt nivåindelat nätverk.

Vi kallar nivåerna *steg*, de olika noderna i varje steg *tillstånd* och optimala variabelvärdet *styrning*.

Man gör följande:

- Dela upp problemet i steg.
- Ta ett steg i taget. Bestäm bästa sättet (styrningen) att uppnå varje tillstånd i steget. Notera den optimala styrningen och den optimala kostnaden för att uppnå varje tillstånd.
- Gå till nästa steg.
- När sista steget nåtts, nysta upp lösningen m.h.a. de noterade styrningarna.

Dynamisk programmering

För att metoden skall fungera krävs följande.

Definition (Optimalitetsprincipen i dynamisk programmering)

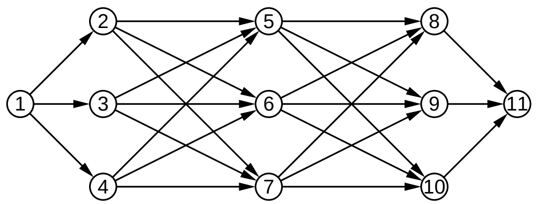
Valet av efterföljande styrningar från ett visst tillstånd får inte bero på hur tillståndet uppnåtts, utan bara på kostnaden att uppnå det.

Dynamisk programmering är ett sätt att göra implicit uppräkning av alla möjliga lösningar.

Man undviker att räkna upp alla möjliga vägar från startnod till slutnod, genom att utnyttja nodpriserna för noderna i det föregående steget.

Dynamisk programmering

Billigaste väg-problem i acyklisk nivåindelad graf.



Nodmärkningsmetod: Ta en nivå i taget:

- $y_1 = 0$.
- För $k = 1, \dots, N$:

  För varje $j \in S_k$: Sätt $y_j = c_{lj} + y_l = \min_i (c_{ij} + y_i)$ och $p_j = l$.

Ordningen inom ett steg oviktig.

Vägen kommer att passera *en* av noderna i varje steg. Vet ej vilken.

Möjliga målfunktioner: $\min \sum$, $\max \sum$, $\min \prod$, $\max \prod$, $\min \max$, $\max \min$.

Dynamisk programmering: Begrepp

I steg k:

Nod j i S_k kallas **tillstånd**, s_k.

Noden man kommer från, l, kallas **styrning**, x_k.

Överföringsfunktion: kopplingen mellan olika steg, $s_{k-1} = T_k(x_k, s_k)$. *(föregångare)*

Målfunktionsvärde, $f_k(s_k)$. *(nodpris)*

Rekursiv målfunktion: $f_k(s_k) = \min_{x_k} (c_k(x_k, s_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$

$= \min_{x_k} (c_k(x_k, s_k) + f_{k-1}(T_k(x_k, s_k)))$

Begränsningar på tillstånd, $s_k \in S_k$, och styrning, $x_k \in X_k$.

Randvillkor på s_0, s_N, samt $f_0(s_0)$.

Dynamisk programmering

Det får inte vara möjligt att hoppa mellan olika tillstånd i samma steg.

Man får heller inte hoppa över en nivå.

$f_k(s_k)$ får endast vara en funktion av s_k, dvs. inte av x_k eller s_{k-1}.

Målfunktionen måste vara separabel i stegen, k, och monotont växande i argumenten.

Sluttillståndet ska vara unikt, annars kan inte lösningen nystas upp.

Man kan notera att dynamisk programmering ger optimal styrning till samtliga tillstånd.

Detta är s.k. *framåtrekursion*, då man finner den bästa styrningen *till* alla tillstånd.

En annan möjlighet är *bakåtrekursion*, då man finner den bästa styrningen *från* alla tillstånd.

Man börjar då i det sista steget och arbetar sig baklänges mot starttillståndet, för att sedan nysta upp framåt.

Typproblem för dynamisk programmering

Tre huvudtyper:

- Lagerhållnings- och produktionsproblem i flera tidsperioder (vilket även inkluderar bytespolicyproblem).
- Bästa väg-problem, med olika målfunktioner (dvs. problemet att finna en väg med vissa egenskaper i ett givet acykliskt nätverk).
- Kappsäcksproblem, med olika målfunktioner (dvs. problem med ett övergripande bivillkor, vilket ofta motsvarar fördelning av en begränsad resurs).

Men angreppssättet betyder att alla problem görs om till väg-problem.

Det är ingen stor skillnad mellan lager- och kappsäcksproblem:

Nivån i kappsäcken är lagernivån (men den minskar vanligtvis aldrig).

Dynamisk programmering för lagerhållningsproblem

Stegindelning: Tidsperiod k motsvarar steg k.

Tillstånd: s_k = antal enheter i lager efter period k.

Styrning: x_k = antal enheter som köps/produceras/säljs i period k.

Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - x_k + d_k$.

Målfunktionsvärde: $f_k(s_k)$ = minimal kostnad för de k första tidsperioderna, om s_k enheter skall finnas i lager efteråt.

Rekursivt målfunktionsuttryck: $f_k(s_k) = \min_{x_k}(c_k(x_k, s_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$

där $c_k(x_k, s_k)$ är produktionskostnaden för x_k enheter och lagerhållningskostnaden för period k om s_k enheter finns i lager efteråt.

Randvillkor: $f_0(s_0) = 0$, s_0 är antal enheter i lager vid start av period 1, s_N är det antal enheter som skall vara i lager efter sista tidsperioden.

Begränsningar: $0 \leq x_k \leq s_k + d_k$ och heltal, $s_k \geq 0$.

Ytterligare villkor och kostnader som är uppdelade i tidsperioder går bra att ta med, medan villkor eller kostnader som ger kopplingar mellan tidsperioderna inte går bra.

Dynamisk programmering för vägproblem

Tillstånd: s_k = slutnod i steg k.

Styrning: x_k = startnod i steg k.

Överföringsfunktion: $s_{k-1} = x_k$.

Målfunktionsvärde: $f_k(s_k)$ = kostnad för billigaste väg från startnoden till nod s_k.

Rekursivt målfunktionsuttryck: $f_k(s_k) = \min_{x_k}(c_k(x_k, s_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$

där $c_k(x_k, s_k)$ är kostnaden för bågen från nod x_k till nod s_k.

Randvillkor: $f_0(s_0) = 0$, s_0 = startnoden, s_N = slutnoden.

Begränsningar: $(x_k, s_k) \in B$ (dvs. endast befintliga bågar får användas).

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem

$$
\begin{aligned}
v^* = \quad \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b && (1) \\
& 0 \le x_j \le u_j \text{ heltal} \quad \forall j && (2)
\end{aligned}
$$

Observera: Ett bivillkor (förutom gränser).

Varje variabel ses som en nivå. Dvs. man bestämmer en variabel i taget.

Högerledet b kan ses som en typ av lagernivå som binder ihop variablerna.
Varje nivå innebär ett (möjligt) ökat utnyttjande av den gemensamma resursen b.

Tillstånd: s_k = den del av högerledet b som får användas till de k första variablerna.

Dynamisk programmering för kappsäcksproblem

$$\max \sum_j c_j x_j \text{ då } \sum_j a_j x_j \le b,\ 0 \le x_j \le u_j \text{ heltal } \forall j$$

En variabel i varje steg.

Tillstånd: s_k = den del av högerledet b som får användas till de k första variablerna.

Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$

Målfunktionsvärde: $f_k(s_k)$ = maximalt värde av de k första sorterna, om vi får använda s_k enheter av kappsäcken.

Rekursivt målfunktionsuttryck: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.

Randvillkor: $f_0(s_0) = 0,\ s_0 \ge 0,\ s_N = b$.

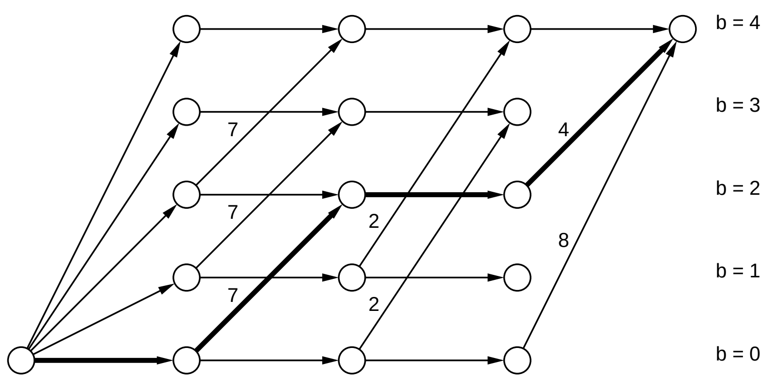
Begränsningar: $0 \le x_k \le u_k$ och heltal, $0 \le s_k \le b$, $x_k \le \lfloor s_k/a_k \rfloor$.

Slacket i kappsäcken ges av s_0. För likhetsvillkor sätts $s_0 = 0$.

Problemets svårighetsgrad beror på b, antalet tillstånd i varje steg.

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

$\max 7x_1 + 2x_2 + 4x_3$
då $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 4$, $x_1 \in \{0,1\}$, $x_2 \in \{0,1\}$, $x_3 \in \{0,1,2\}$



Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

$\max 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 5x_6$
då $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \le 9$, $x_j \in \{0,1,2\}\ \forall j$

$f_0(s_0) = 0,\ s_0 \ge 0,\ s_6 = 9$.

Steg 1 (x_1):

$0 \le s_1 \le 9$, $x_1 \in \{0,1,2\}$.

$f_1(s_1) = \max_{x_1}(c_1 x_1 + f_0(s_0)) = \max_{x_1}(3x_1)$ då $x_1 \le \lfloor s_1/a_1 \rfloor = \lfloor s_1/2 \rfloor$

dvs. $x_1 = 0$ om $s_1 < 2$ och $x_1 \le 1$ om $s_1 < 4$.

Gör optimeringen i en tabell:

$x_1 \diagdown s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	3	3	3	3	3	3	3	3
2	-	-	-	-	6	6	6	6	6	6
$f_1(s_1)$	0	0	3	3	6	6	6	6	6	6
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

Steg 2 (x_2): $0 \leq s_2 \leq 9$, $x_2 \in \{0, 1, 2\}$.

Det enda som behöver sparas från förra steget är $f_1(s_1)$.

$s_1 = s_2 - a_2 x_2 = s_2 - 3x_2$.

$f_2(s_2) = \max_{x_2}(c_2 x_2 + f_1(s_1)) = \max_{x_2}(4x_2 + f_1(s_2 - 3x_2))$

då $x_2 \leq \lfloor s_2/a_2 \rfloor = \lfloor s_2/3 \rfloor$ dvs. $x_2 = 0$ om $s_2 < 3$ och $x_2 \leq 1$ om $s_2 < 6$.

Om $x_2 = 0$ fås $f_1(s_2)$.

Om $x_2 = 1$ fås $4 + f_1(s_2 - 3)$ (flytta 3 steg åt höger och addera 4).

Om $x_2 = 2$ fås $8 + f_1(s_2 - 6)$ (flytta 6 steg åt höger och addera 8).

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	3	3	6	6	6	6	6	6
1	-	-	-	4	4	7	7	10	10	10
2	-	-	-	-	-	-	8	8	11	11
$f_2(s_2)$	0	0	3	4	6	7	8	10	11	11
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	1	0	1	2	1	2	2

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

Steg 3 (x_3): $0 \leq s_3 \leq 9$, $x_3 \in \{0, 1, 2\}$.

$s_2 = s_3 - a_3 x_3 = s_3 - 5x_3$.

$f_3(s_3) = \max_{x_3}(c_3 x_3 + f_2(s_2)) = \max_{x_3}(2x_3 + f_2(s_3 - 5x_3))$

då $x_3 \leq \lfloor s_3/a_3 \rfloor = \lfloor s_3/5 \rfloor$ dvs. $x_3 = 0$ om $s_3 < 5$ och $x_3 <= 1$ om $s_3 < 10$.

Om $x_3 = 0$ fås $f_2(s_3)$.

Om $x_3 = 1$ fås $2 + f_2(s_3 - 5)$ (flytta 5 steg åt höger och addera 2).

Om $x_3 = 2$ fås $4 + f_2(s_3 - 10)$ (flytta 10 steg åt höger och addera 4).

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	3	4	6	7	8	10	11	11
1	-	-	-	-	-	2	2	5	6	8
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$f_3(s_3)$	0	0	3	4	6	7	8	10	11	11
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

Steg 4 (x_4): $0 \leq s_4 \leq 9$, $x_4 \in \{0, 1, 2\}$.

$s_3 = s_4 - a_4 x_4 = s_4 - 2x_4$.

$f_4(s_4) = \max_{x_4}(c_4 x_4 + f_3(s_3)) = \max_{x_4}(5x_4 + f_3(s_4 - 2x_4))$

då $x_4 \leq \lfloor s_4/a_4 \rfloor = \lfloor s_4/2 \rfloor$ dvs. $x_4 = 0$ om $s_4 < 2$ och $x_4 \leq 1$ om $s_4 < 4$.

Om $x_4 = 0$ fås $f_3(s_4)$.

Om $x_4 = 1$ fås $5 + f_3(s_4 - 2)$ (flytta 2 steg åt höger och addera 5).

Om $x_4 = 2$ fås $10 + f_3(s_4 - 4)$ (flytta 4 steg åt höger och addera 10).

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	3	4	6	7	8	10	11	11
1	-	-	5	5	8	9	11	12	13	15
2	-	-	-	-	10	10	13	14	16	17
$f_4(s_4)$	0	0	5	5	10	10	13	14	16	17
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

Steg 5 (x_5): $0 \leq s_5 \leq 9$, $x_5 \in \{0, 1, 2\}$.

$s_4 = s_5 - a_5 x_5 = s_5 - 3x_5$.

$f_5(s_5) = \max_{x_5}(c_5 x_5 + f_4(s_4)) = \max_{x_5}(6x_5 + f_4(s_5 - 3x_5))$

då $x_5 \leq \lfloor s_5/a_5 \rfloor = \lfloor s_5/3 \rfloor$ dvs. $x_5 = 0$ om $s_5 < 3$ och $x_5 \leq 1$ om $s_5 < 6$.

Om $x_5 = 0$ fås $f_4(s_5)$.

Om $x_5 = 1$ fås $6 + f_1(s_2 - 3)$ (flytta 3 steg åt höger och addera 6).

Om $x_5 = 2$ fås $12 + f_1(s_2 - 6)$ (flytta 6 steg åt höger och addera 12).

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	5	5	10	10	13	14	16	17
1	-	-	-	6	6	11	11	16	16	19
2	-	-	-	-	-	-	12	12	17	17
$f_5(s_5)$	0	0	5	6	10	11	13	16	17	19
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	1	0	1	0	1	2	1

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

Steg 6 (x_6): $s_6 = 9$, $x_6 \in \{0, 1, 2\}$.

$s_5 = s_6 - a_6 x_6 = s_6 - 4x_2$.

$f_6(s_6) = \max_{x_6}(c_6 x_6 + f_5(s_5)) = \max_{x_6}(5x_6 + f_5(s_6 - 4x_6))$

då $x_6 \leq \lfloor s_6/a_6 \rfloor = \lfloor s_6/4 \rfloor$ dvs. $x_6 = 0$ om $s_6 < 4$ och $x_6 \leq 1$ om $s_6 < 8$.

Om $x_6 = 0$ fås $f_5(s_6)$.

Om $x_6 = 1$ fås $5 + f_5(s_6 - 4)$ (flytta 4 steg åt höger och addera 5).

Om $x_6 = 2$ fås $10 + f_5(s_6 - 8)$ (flytta 8 steg åt höger och addera 10).

$x_6 \backslash s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	5	6	10	11	13	16	17	19
1	-	-	-	-	5	5	10	11	15	16
2	-	-	-	-	-	-	-	-	10	10
$f_6(s_6)$	0	0	5	6	10	11	13	16	17	19
$\hat{x}_6(s_6)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem: Exempel

Nysta upp lösningen.

Nu behövs $\hat{x}_k(s_k)$ och överföringsfunktionen $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \leq 9$

Börja bakifrån:

$s_6 = 9 \Rightarrow \hat{x}_6(9) = 0 \Rightarrow s_5 = s_6 = 9 \Rightarrow \hat{x}_5(9) = 1 \Rightarrow s_4 = s_5 - 3 = 6$
$\Rightarrow \hat{x}_4(6) = 2 \Rightarrow s_3 = s_4 - 2 * 2 = 2 \Rightarrow \hat{x}_3(2) = 0 \Rightarrow s_2 = s_3 = 2$
$\Rightarrow \hat{x}_2(2) = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 = 2 \Rightarrow \hat{x}_1(2) = 1 \Rightarrow s_0 = s_1 - 2 = 0$

Optimal lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$.

Optimala målfunktionsvärdet ges av $f_6(9) = 19$.

Inget slack i bivillkoret, ty $s_0 = 0$.

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem

Detta angreppssätt kan användas på många typer av "kappsäckar".

Dvs. där man har ett "lager" som fylls på eller töms vid olika tidpunkter.

Även på kontinuerliga "kappsäckar", om man diskretiserar.

Man inför då ett tillstånd för varje möjlig nivå i kappsäcken/lagret.

Och bågar, framåt i tiden, för varje möjlig ändring.

Dynamisk programmering: Variationer

Flera tillståndsvariabler. T.ex. flera kappsäcksvillkor.

Måste undersöka samtliga kombinationer av tillstånden.

Flera styrvariabler. Även här måste samtliga kombinationer av de möjliga styrningarna undersökas.

Båda jobbigare än att öka antalet steg.

Tillståndsvariabeln måste vara diskret, men styrvariabeln kan vara kontinuerlig.

Ibland kan optimeringen göras analytiskt i ett steg.

Strukturen i Dynamisk programmering beror inte på hur delproblemen löses för ett steg.

Dynamisk programmering: Slump

Ibland hamnar man inte alltid i det tillstånd man vill komma till, utan kan med viss sannolikhet hamna i ett annat.

Exempelvis kanske försäljningen inte blir exakt vad man förväntade sig.

Detta kan hanteras av **stokastisk** dynamisk programmering.

Man måste då använda bakåtrekursion.

I framåtrekursion står man i ett visst tillstånd, och vill finna bästa vägen dit (från förra steget).

I bakåtrekursion står man i ett visst tillstånd, och vill finna bästa vägen därifrån (till nästa steg).

Om man vet vilket tillstånd man befinner sig i, och vet vart man vill gå, kan man räkna ut sannolikheten att man hamnar där man vill, eller i något annat tillstånd i nästa steg.

(Detta fungerar inte åt andra hållet.)

Dynamisk programmering: Framåtrekursion

I steg k:

Noden i S_k kallas **tillstånd**, s_k.
Noden man kommer från kallas **styrning**, x_k.

Överföringsfunktion: kopplingen mellan olika steg, $s_{k-1} = T_k(x_k, s_k)$.

Målfunktionsvärde, $f_k(s_k)$. (Kostnaden från startnod till s_k.)

Rekursiv målfunktion: $f_k(s_k) = \min_{x_k}(c_k(x_k, s_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$

Begränsningar på tillstånd, $s_k \in S_k$, och styrning, $x_k \in X_k$.
Randvillkor på s_0, s_N, samt $f_0(s_0)$.

Dynamisk programmering: Bakåtrekursion

I steg k:

Noden i S_k kallas **tillstånd**, s_k.
Noden man går till kallas **styrning**, x_k.

Överföringsfunktion: kopplingen mellan olika steg, $s_{k+1} = T_k(x_k, s_k)$.

Målfunktionsvärde, $f_k(s_k)$. (Kostnaden från s_k till slutnod.)

Rekursiv målfunktion: $f_k(s_k) = \min_{x_k}(c_k(x_k, s_k) + f_{k+1}(s_{k+1}))$

Begränsningar på tillstånd, $s_k \in S_k$, och styrning, $x_k \in X_k$.
Randvillkor på s_0, s_N, samt $f_N(s_N)$.

Dynamisk programmering: Stokastisk bakåtrekursion

Vi står i nod $i \in S_k$ och siktar mot nod $j \in S_{k+1}$

dvs. vill använda båge (i, j).

Var hamnar vi?

I nod j med sannolikhet p_{ij} (som beror på tillstånd och styrning).

Exempel: Vi står i nod 1. I nästa steg finns noderna 2, 3, och 4.

Vi siktar mot nod 2, och hamnar i nod 2 med sannolikhet 0.7, i nod 3 med sannolikhet 0.2, och i nod 4 med sannolikhet 0.1.

Den förväntade kostnaden för att komma till nästa steg blir då $0.7c_{12} + 0.2c_{13} + 0.1c_{14}$.

Det betyder också att vägen ska fortsätta från nod 2 med sannolikhet 0.7, från nod 3 med sannolikhet 0.2 och från nod 4 med sannolikhet 0.1.

Vi ska därför addera $0.7f_2(2) + 0.2f_2(3) + 0.1f_2(4)$ till $f_1(s_1)$.

Vi använder alltså väntevärden:
$f_k(s_k) = \min_{x_k}(E(c_k(x_k, s_k) + f_{k+1}(s_{k+1})))$

I exemplet:
$f_1(s_1) = \min((0.7(c_{12} + f_2(2)) + 0.2(c_{13} + f_2(3)) + 0.1(c_{14} + f_2(4))), \ldots)$.

Uppnystningen av lösningen blir osäker. Vi kanske inte hamnar där vi vill.

Det räcker inte att ta fram den mest sannolika vägen, vi måste även veta hur vi ska fortsätta om vi hamnar fel.

Slutsats: Ta fram optimal styrning från *alla* tillstånd.

Jämför billigaste väg-träd.