Lagrangedualitet

Storskaliga problem har alltid struktur.

Ofta: ett fåtal bivillkor kopplar ihop annars separabla delar.

Lagrangerelaxation: “Stoppa upp vissa bivillkor i målfunktionen”.

Dvs. ersätt vissa bivillkor med en term (straff) i målfunktionen.

Linjär straffunktion.

Ger enklare problem att lösa (subproblem).

Men måste hitta rätt straff (lutning).

Måste lösa subproblemet många gånger, och uppdatera straffkoefficienterna.

Subproblemet är en relaxation, ger en optimistisk (undre) gräns för det optimala målfunktionsvärdet.

En tillåten lösning ger en pessimistisk (övre) gräns.

Lagrangedualitet: Numeriskt exempel 1

$$
\begin{aligned}
z = \quad & \min \quad -3x_1 - 2x_2 \\
& \text{då} \quad 12x_1 + 17x_2 \leq 29 \\
& \qquad 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2
\end{aligned}
$$

Låt $X = \{x : 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}$, och relaxera det första bivillkoret med multiplikator u. Detta ger subproblemet

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} \ -3x_1 - 2x_2 + \bar{u}(12x_1 + 17x_2 - 29)$$

eller

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} \ (12\bar{u} - 3)x_1 + (17\bar{u} - 2)x_2 - 29\bar{u}$$

Testa med $\bar{u} = 0$: Subproblemet blir

$$\varphi(0) = \min_{x \in X} \ -3x_1 - 2x_2$$

och har lösningen $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. $\varphi(0) = -10$, vilket är en undre gräns.

Beräkna $\xi = 12x_1 + 17x_2 - 29 = 29 > 0$, så lösningen är inte tillåten (i det relaxerade bivillkoret). Vi får ingen övre gräns.

Lagrangedualitet: Numeriskt exempel 1

Lagrangerelaxationen: $\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} \ (12\bar{u} - 3)x_1 + (17\bar{u} - 2)x_2 - 29\bar{u}$

Testa med $\bar{u} = 1$: Subproblemet blir

$$\varphi(1) = \min_{x \in X} \ 9x_1 + 15x_2 - 29$$

med lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. $\varphi(1) = -29$ (en sämre undre gräns).

Beräkna $\xi = 12x_1 + 17x_2 - 29 = -29 < 0$, lösningen tillåten.

Övre gräns: 0.

Vi har $\underline{z} = -10$ och $\bar{z} = 0$.

Testa med $\bar{u} = 0.2$: Subproblemet blir

$$\varphi(0.2) = \min_{x \in X} \ -0.6x_1 + 1.4x_2 - 5.8$$

med lösningen $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. $\varphi(0.2) = -7$, en bättre undre gräns.

$\xi = -5$, lösningen är tillåten. Övre gräns: -6.

Vi har nu $\underline{z} = -7$ och $\bar{z} = -6$. Ganska bra.

Lagrangedualitet

Mer allmän dualitet (än LP-dualitet).

$$
\begin{aligned}
v^* = \quad & \min \quad f(x) & & \\
& \text{då} \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m & \quad (1) & \qquad (P) \\
& \qquad x \in X & \quad (2) &
\end{aligned}
$$

X t.ex. en begränsad heltalsmängd.

Relaxera bivillkorsgrupp 1 med u som Lagrangemultiplikatorer.

Lagrangefunktionen: $L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$.

Lagrangerelaxationen (subproblemet): Sätt priser, u, på bivillkoren.

För fixerade priser $\bar{u}$: Lös ett problem i x:

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} L(x, \bar{u}) = \min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x) \qquad (L)$$

Praktiskt krav: L ska vara *mycket* lättare att lösa än P.

Vi måste lösa L för flera olika värden på $\bar{u}$.

Lagrangedualitet

$\varphi(u)$ kallas *den duala funktionen*. Den är konkav.

Svag dualitet: $\varphi(u) \le v^*$ för alla $u \ge 0$.

Relaxation: Det blir för bra.

Vi vill maximera den undre gränsen, dvs. lösa följande problem i u.

$$v_L = \max \varphi(u) \quad \text{då} \quad u \ge 0 \tag{PL}$$

PL kallas *det duala problemet*. Vi vet att $v_L \le v^*$.

Stark dualitet: $v_L = v^*$ om X är konvex.

Om problemet är konvext och $f(x)$ är strikt konvex så har Lagrangerelaxationen en unik lösning
och den duala funktionen, $\varphi(u)$, är differentierbar.

Om X inte är konvex, så är det möjligt att $v_L < v^*$.
Detta kallas dualgap.

Lagrangedualitet med linjära funktioner

$$\begin{aligned} v^* = \quad & \min && c^T x \\ & \text{då} && Ax \le b \\ & && x \in X \end{aligned} \tag{P}$$

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} \; c^T x + \bar{u}^T (Ax - b) \tag{L}$$

eller

$$\begin{aligned} v^* = \quad & \min && \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \text{då} && \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & && x \in X \end{aligned} \tag{P}$$

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i) \tag{L}$$

Lagrangedualitet: Numeriskt exempel 2

$$\begin{aligned} z = \quad & \min && -3x_1 - 2x_2 \\ & \text{då} && x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & && 0 \le x_1 \le 1 \\ & && 0 \le x_2 \le 2 \end{aligned}$$

Låt $X = \{x : 0 \le x_1 \le 1,\; 0 \le x_2 \le 2\}$, och relaxera det första bivillkoret med multiplikator u. Detta ger subproblemet

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} c^T x + \bar{u}^T (Ax - b) = \min_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 + \bar{u}(x_1 + 2x_2 - 4)$$

Det tillåtna området X är en rektangel med de fyra extrempunkterna $x^{(1)} = (0, 0)$, $x^{(2)} = (0, 2)$, $x^{(3)} = (1, 2)$ och $x^{(4)} = (1, 0)$.

När vi ändrar $\bar{u}$, vrides målfunktionen, så vi får olika hörn som optimallösningar.

Lagrangedualitet

Det tillåtna området till L (dvs. X) beror ej på u.

Om vi ändrar priserna u, så ändras enbart målfunktionen i L.

Låt $x^{(k)}$ vara alla punkter i X som skulle kunna vara optimala i L.

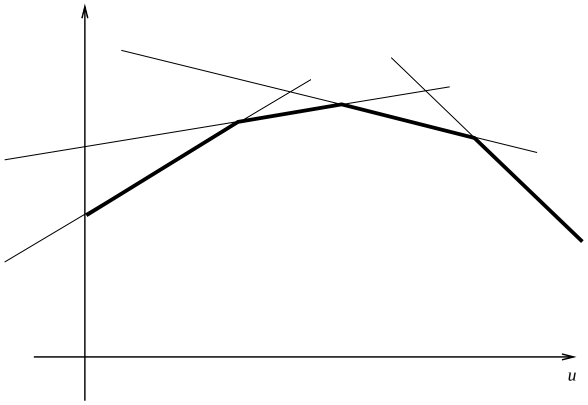
$$\varphi(\bar{u}_1) = \min_{x \in X} c^T x + \bar{u}_1^T (Ax - b) = \min_{k \in P_X} c^T x^{(k)} + \bar{u}_1^T (Ax^{(k)} - b) = \min_{k \in P_X} l_k(\bar{u}_1)$$

där $l_k(\bar{u}_1) = (Ax^{(k)} - b)^T \bar{u}_1 + c^T x^{(k)}$.

Den duala funktionen $\varphi(u)$ är punktvis minimum av ett antal linjära funktioner, $l_k(u)$.

Den är generellt sett inte är differentierbar.

Lagrangedualitet: Dual funktion



Lagrangedualitet: Numeriskt exempel 2

$$\begin{aligned} z = \ \min \ & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{då} \ & x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x \in X = \{x : 0 \leq x_1 \leq 1, \ 0 \leq x_2 \leq 2\} \end{aligned}$$

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 + \bar{u}(x_1 + 2x_2 - 4)$$

De affina delarna som definierar $\varphi(u)$ är konstruerade som
$l_k(u) = c^T x^{(k)} + u^T(Ax^{(k)} - b) = -3x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + u(x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} - 4)$
För olika extrempunkter till X får vi

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (0,0): \ l_1(u) = -4u \\ x^{(2)} &= (0,2): \ l_2(u) = -4 \\ x^{(3)} &= (1,2): \ l_3(u) = -7 + u \\ x^{(4)} &= (1,0): \ l_4(u) = -3 - 3u \end{aligned}$$

$\varphi(u)$ är definierad som punktvis minimum av dessa, så vi får
$\varphi(u) = \min_k l_k(u) = \min(-4u, -4, -7 + u, -3 - 3u)$

Lagrangedualitet: Numeriskt exempel 2

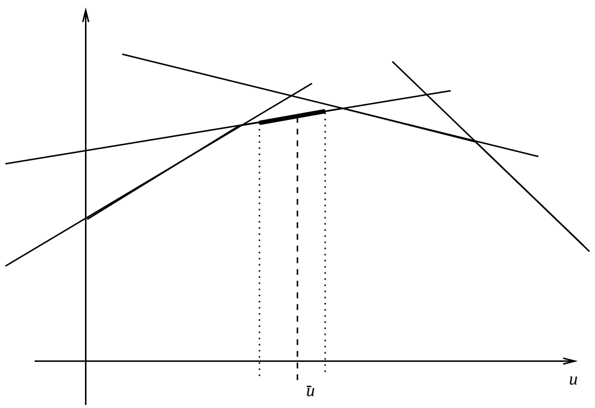
Lösning av L i olika u-punkter ger den minimala affina funktionen i varje punkt. För $\bar{u} = 2$, får vi

$$\varphi(2) = \min_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 + 2(x_1 + 2x_2 - 4) = \min_{x \in X} -x_1 + 2x_2 - 8$$

vilket ger den (unika) optimallösningen $\bar{x} = x^{(4)} = (1,0)$ and $\varphi(2) = -9$.
Vi ser att $\varphi(2) = \min_k l_k(2) = l_4(2)$.

Även i en liten omgivning kring $u = 2$ är $\varphi(u) = -3 - 3u$, vilket är en differentierbar funktion, med derivatan -3.

Lagrangedualitet: Unik subproblemlösning



Lagrangedualitet: Numeriskt exempel 2

I punkten $\bar{u} = 1$, ger L

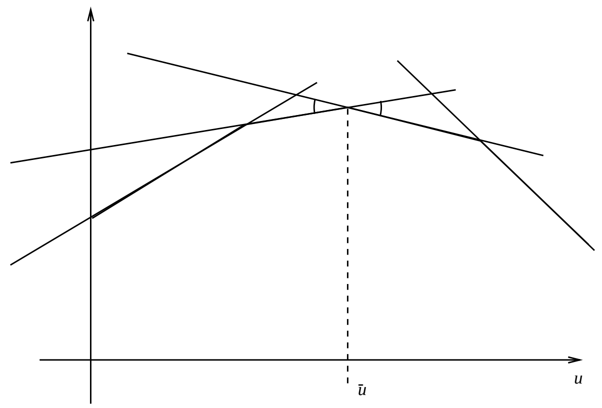
$$\varphi(1) = \min_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 + 1(x_1 + 2x_2 - 4) = \min_{x \in X} -2x_1 - 4$$

och där är både $\bar{x} = x^{(3)} = (1, 2)$ och $\bar{x} = x^{(4)} = (1, 0)$ optimala, samt alla konvexkombinationer av dem.

I närheten av $u = 1$ definieras $\varphi(u)$ som $\varphi(u) = \min(-7 + u, -3 - 3u)$ och båda affina delarna är aktiva i $u = 1$.
Därför är inte $\varphi(u)$ differentierbar i $u = 1$.

$\varphi(u)$ är inte differentierbar i u där L har fler än en optimal lösning.

Lagrangedualitet: Ej unik subproblemlösning



Lagrangedualitet: Subgradient

En generalisering av gradient.

Definition

Om $\varphi(u) \leq \varphi(\bar{u}) + \xi^T(u - \bar{u})$ för alla $u \geq 0$ så är ξ en subgradient till $\varphi(u)$ i punkten $\bar{u}$.

En subgradient är "lutningen" av den duala funktionen. Möjligtvis icke-unik.

En subgradient fås som $\xi = A\bar{x} - b$, där $\bar{x}$ är en optimallösning till L.

I ord: En subgradient fås genom att stoppa en optimallösning till L i de relaxerade bivillkoren.

En konvexkombination av subgradienter är också en subgradient.

Lagrangedualitet: Numeriskt exempel

Lösning av L i en u-punkt ger alltid en subgradient. För $\bar{u} = 2$, får vi $\varphi(2) = \min_{x \in X} -x_1 + 2x_2$, vilket ger den (unika) optimallösningen $\bar{x} = (1, 0)$ and $\varphi(2) = -9$.
Vi har subgradient $\xi = \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 - 4$, och får $\xi = -3$ för $\bar{x} = (1, 0)$.
Eftersom lösningen och subgradienten är unik, är $\varphi(u)$ differentierbar i punkten $\bar{u} = 2$.

I punkten $\bar{u} = 1$, ger L $\varphi(1) = \min_{x \in X} -2x_1 - 4$, och där är både $\bar{x} = x^{(3)} = (1, 2)$ och $\bar{x} = x^{(4)} = (1, 0)$ optimala.
Vi har subgradient $\xi = \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 - 4$, och får $\xi = 1$ för $\bar{x} = (1, 2)$ och $\xi = -3$ för $\bar{x} = (1, 0)$.
$\varphi(u)$ är inte differentierbar i $u = 1$.

Både positiv och negativ lutning indikerar dualt maximum.

Lagrangedualitet: Duala optimum

Var ligger optimum, u^*, till det duala problemet, PL:
$v_L = \max \varphi(u)$ då $u \geq 0$?

För varje subgradient, ξ, innehåller mängden $D = \{u : (u - \bar{u})^T \xi \geq 0\}$ alla optimala duala lösningar till PL.

Varje subgradient, ξ, pekar in in det halvrum som innehåller alla optimala duala lösningar till PL.

Om vi tar ett litet steg i en subgradients riktning kommer vi närmare optimum.

Därför kan subgradienter användas som sökriktningar för att lösa PL, dvs. för att maximera den duala funktionen.

Lagrangedualitet på linjära heltalsproblem

Vi kan visa att $v_{LP} \leq v_L \leq v^*$.

Ibland är alla extrempunkter till X heltal. Då kan man strunta i heltalskraven i L, och ändå få heltalslösning.

Definition

Om det optimala målfunktionsvärdet till L inte ändras om heltalskraven ignoreras, sägs L ha heltalsegenskapen.

Om L har heltalsegenskapen, så gäller $v_{LP} = v_L$.

En högre undre gräns är bättre.

Slutsats: Lagrangerelaxation kan vara bättre än LP-relaxation.
Möjligt att $v_{LP} < v_L < v^*$.
Om subproblemet har heltalsegenskapen är de lika bra. $v_{LP} = v_L$.

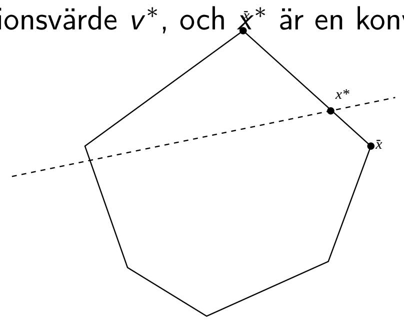
Lagrangedualitet med linjära funktioner: Styrbarhet

När man tar bort vissa bivillkor, kommer vissa extrempunkter att sluta vara extrempunkter.

x^* kanske aldrig kan erhållas som optimal lösning till L.

Vi kallar detta *brist på styrbarhet*.
I konvexa fallet: x^* är en av optimallösningarna till L i u^*, men är ej extrem.

Lagrangetermen vrider målfunktionen så att vissa punkter i X (icke-optimala och kanske inte ens tillåtna i P) kommer att ge målfunktionsvärde v^*, och x^* är en konvexkombination av dessa punkter.



Lagrangedualitet: Optimalitetsvillkor

Tillräckligt optimalitetskriterium för PL: Nollvektorn är en subgradient.

$$\boxed{\text{Om } \xi = 0 \text{ och } \bar{u} \geq 0 \text{ så är } \bar{u} \text{ optimal.}}$$

Subgradienterna är det otillåtna slacket i de relaxerade bivillkoren, så om detta slack är noll, är villkoren uppfyllda.

Fullständigt optimalitetskriterium: Projektionen av en subgradient är noll.

$$\boxed{\text{Om } \xi^T \bar{u} = 0,\ \xi \leq 0 \text{ och } \bar{u} \geq 0 \text{ så är } \bar{u} \text{ optimal.}}$$

Dvs. om $u_i = 0$ så indikerar $\xi_i \leq 0$ optimalitet (eftersom u_i inte får minskas).

I det ickekonvexa fallet kanske det inte existerar någon lösning till subproblemet som ger denna subgradient. Den kanske bara finns som konvexkombination av subgradienter givna av lösningar till L.

Praktisk lösningsmetodik baserad på Lagrangedualitet

Lagrangeheuristik:

1. Skaffa ett startvärde på $\bar{u}$ (t.ex. $\bar{u} = 0$).
2. Lös Lagrangerelaxationen, vilket ger $\bar{x}$ och $\varphi(\bar{u})$ (samt ξ).
3. Om $\varphi(\bar{u})$ ger en förbättrad undre gräns, uppdatera den.
4. Om $\bar{x}$ inte är tillåten, försök ändra den lite så att den blir tillåten.
5. Om $\bar{x}$ är tillåten och $f(\bar{x})$ ger en förbättrad övre gräns, uppdatera den.
6. Uppdatera $\bar{u}$ med passande metod. Gå till 2.

Maximera $\varphi(u)$ med en sökmetod (sökriktning och steglängd).
Obs: $\varphi(u)$ inte är differentierbar.

Använd subgradienter som sökriktningar, men gör ej linjesökning.
(Subgradienten är inte alltid en ökanderiktning.)
Använd istället en approximativ steglängdsformel, som kan ge en försämring av målfunktionsvärdet.

Praktisk lösningsmetodik baserad på Lagrangedualitet

När $u_i = 0$ så ignoreras bivillkoret $g_i(x) \leq 0$ helt.
Om u_i ökas, så kostar det att sätta $g_i(x) > 0$.

En subgradient fås som $\xi_i = g_i(\bar{x})$.
$\xi_i > 0$: bivillkoret inte är uppfyllt, dvs. att straffet är för lågt. Öka u_i.
$\xi_i < 0$: bivillkoret är uppfyllt, dvs. att straffet är för högt. Minska u_i.

Subgradienter pekar Euklidiskt in i rätt halvrum.

Exempel: Lagrangedualitet på kappsäcksproblem

$$\begin{array}{llll} \max & 3x_1 & +4x_2 & +3x_3 \\ \text{då} & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 \leq 4 \\ & x_j \in \{0,1\}\ \forall j & & \end{array}$$

Standardform: $f(x) = -3x_1 - 4x_2 - 3x_3$ (minimering) samt $g(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4$ och $X = \{x : x_j \in \{0,1\}\ \forall j\}$.

Relaxera kappsäcksvillkoret:

$$\min\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + u(3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4) \text{ då } x_j \in \{0,1\}\ \forall j \qquad (L)$$

eller

$$\min\ (3u-3)x_1 + (2u-4)x_2 + (u-3)x_3 - 4u \text{ då } x_j \in \{0,1\}\ \forall j$$

L är trivial att lösa. Notera tecknet (+ eller -) på koefficienten framför varje variabel.
Om $(3u - 3) > 0$ (dvs. $u > 1$) sätter vi $x_1 = 0$,
om $(3u - 3) < 0$ (dvs. $u < 1$) sätter vi $x_1 = 1$,
och om $(3u - 3) = 0$ (dvs. $u = 1$) spelar det ingen roll.

Exempel: Lagrangedualitet på kappsäcksproblem

Börja med $u = 0$, vilket ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 1$.
(Vi struntar helt i bivillkoret.)

Detta ger $\varphi(0) = -3 - 4 - 3 = -10$, vilket är en undre gräns för v^*.
En subgradient fås som $\xi = \varphi(\bar{x}) = 3 + 2 + 1 - 4 = 2 > 0$,
vilket indikerar att u bör ökas,
samt att lösningen inte är tillåten i det relaxerade bivillkoret,
så vi får ingen övre gräns.

Man kan notera att värdet $\varphi(0)$ och subgradienten ξ ger information om att funktionen

$$l_1(u) = -10 + 2u$$

ger en beskrivning av funktionen $\varphi(u)$ kring $u = 0$.

Exempel: Lagrangedualitet på kappsäcksproblem

Nu är frågan hur u ska uppdateras.

Ett sätt är små duala ökningssteg, där man går till nästa brytpunkt.

Brytpunkterna fås i de punkter där det optimala värdet på x ändras, dvs. där tecknet på koefficienten före något x ändras.

Målfunktionen i L är $(3u-3)x_1 + (2u-4)x_2 + (u-3)x_3$, vilket ger följande brytpunkter:

- för x_1: $u = 1$
- för x_2: $u = 2$
- för x_3: $u = 3$

Om vi sätter $u = 1$, fås $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, samt x_1 till 0 eller 1.

Vi får nu undre gränsen $\varphi(1) = -2 - 2 - 4 = -8$.

Om vi sätter $x_1 = 1$, så blir lösningen inte tillåten, med subgradient $\xi = 2$.

Om vi sätter $x_1 = 0$, så blir lösningen tillåten, med subgradient $\xi = -1$.

Exempel: Lagrangedualitet på kappsäcksproblem

Den tillåtna lösningen har målfunktionsvärde -7, en övre gräns för v^*.

Vi har nu $-8 \leq v^* \leq -7$.

De två subgradienterna i denna punkt är $\xi = -1$ och $\xi = 2$, vilket har $\xi = 0$ som konvexkombination.

Detta visar att $u = 1$ ger dualt maximum av $\varphi(u)$: $v_L = \varphi(1) = -8$.

Om vi sätter $x_1 = 1$ fås (som för $u = 0$) funktionen $l_1(u) = -10 + 2u$.

Om vi sätter $x_1 = 0$ fås istället funktionen $l_2(u) = -7 - u$.

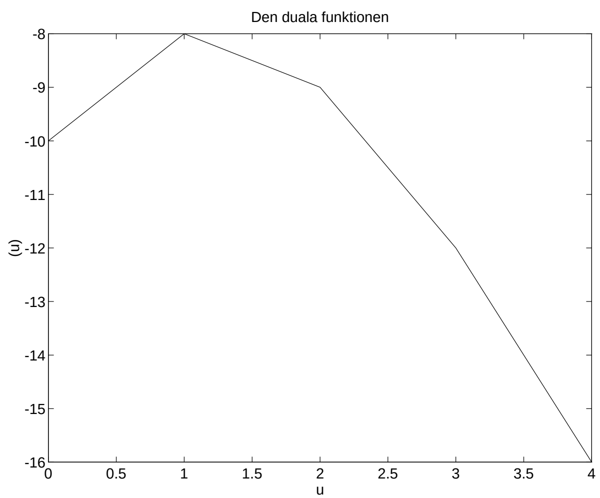
Båda dessa funktioner ger en beskrivning av funktionen $\varphi(u)$ kring $u = 1$.

(Det finns faktiskt ingen bättre tillåten heltalslösning, så $v^* = -7$, och vi har ett dualgap på 1 mellan -7 och -8.)

L har heltalsegenskapen, så $v_L = v_{LP}$.

LP-relaxationen har optimum $x_1 = 1/3, x_2 = 1, x_3 = 1$ och $v_{LP} = -8$.

Exempel: Lagrangedualitet på kappsäcksproblem



Dantzig-Wolfedekomposition

Dantzig-Wolfedekomposition (dual dekomposition) sparar alla funna subproblemlösningar, och bygger upp en beskrivning av den duala funktionen, med hjälp av de linjära funktionerna $l_k(u)$.

Subproblem: Lagrangerelaxation, indata Lagrangemultiplikatorer.

Ger en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet.

Masterproblem: ger värden på multiplikatorerna.

Arbetar med konvexkombinationer av alla funna subproblemlösningar.

Masterproblemet ger tillåtna lösningar, och pessimistiska uppskattningar.

Det ackumulerar information och ger till slut optimum.

Dantzig-Wolfedekomposition: Numeriskt exempel 1

$$\begin{array}{lll} z = & \min & -3x_1 - 2x_2 \\ & \text{då} & 12x_1 + 17x_2 \leq 29 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array}$$

Låt $X = \{x : 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}$, och relaxera det första bivillkoret med multiplikator u. Detta ger subproblemet

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{x \in X} -3x_1 - 2x_2 + \bar{u}(12x_1 + 17x_2 - 29)$$

X har extrempunkter $x^{(1)} = (0,0)$, $x^{(2)} = (2,0)$, $x^{(3)} = (0,2)$ $x^{(4)} = (2,2)$.

Dantzig-Wolfesnitt:

$$q \leq c^T x^{(k)} + u^T(Ax^{(k)} - b) = -3x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + u(12x_1^{(k)} + 17x_2^{(k)} - 29)$$

$$\begin{array}{l} x^{(1)} = (0,0): \ q \leq -29u \\ x^{(2)} = (2,0): \ q \leq -6 - 5u \\ x^{(3)} = (0,2): \ q \leq -4 + 5u \\ x^{(4)} = (2,2): \ q \leq -10 + 29u \end{array}$$

Dantzig-Wolfedekomposition: Numeriskt exempel

Dantzig-Wolfes fullständiga masterproblem:

$$\begin{array}{lll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq -29u \\ & & q \leq -6 - 5u \\ & & q \leq -4 + 5u \\ & & q \leq -10 + 29u \\ & & u \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llrrrrcl} v_{DM} = & \min & & -6\lambda_2 & -4\lambda_3 & -10\lambda_4 & & \\ & \text{då} & 29\lambda_1 & +5\lambda_2 & -5\lambda_3 & -29\lambda_4 & \geq & 0 \\ & & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 1 \\ & & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Lösning: $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} + \lambda_4 x^{(4)}$

Generera ett nytt snitt i varje iteration.

Dantzig-Wolfedekomposition: Subproblemet

X kan ha många extrempunkter.

Dvs. DM kan ha många snitt.

Dekompositionsidé: Skaffa ett snitt i taget.

Lös ofullständigt masterproblem,
ger lovande punkt.
Lös subproblem,
ger korrekt värde i denna punkt, och det korrekta snittet i den punkten.
Lägg till snittet och lös om masterproblemet.

Upprepa tills övre och undre gräns är lika.

Dantzig-Wolfedekomposition: Numeriskt exempel 1

Om origo är tillåtet i subproblemet, lägg till det snittet direkt. $q \leq -29u$

Lös DS för $u = 0$: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $\varphi(0) = -10$, så $\underline{v} = -10$, snitt: $q \leq -10 + 29u$.

Lös DM: max q då $q \leq -29u$, $q \leq -10 + 29u$, $u \geq 0$.
ger $u = 5/29$ och $q = -5$, så $\bar{v} = -5$. Nu är $\underline{v} = -10$ och $\bar{v} = -5$.

Lös DS för $u = 5/29$: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $\varphi(5/29) = -6.86$, så $\underline{v} = -6.86$, snitt: $q \leq -6 - 5u$. Nu är $\underline{v} = -6.86$ och $\bar{v} = -5$.

Lös DM: max q då $q \leq -29u$, $q \leq -10 + 29u$, $q \leq -6 - 5u$, $u \geq 0$.
Detta ger $u = 2/17$ och $q = -112/17 = -6.588$, så $\bar{v} = -112/17 = -6.588$. Nu är $\underline{v} = -6.86$ och $\bar{v} = -6.588$.

Lös DS för $u = 2/17$: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $\varphi(2/17) = -112/17 = -6.588$, så $\underline{v} = -112/17 = -6.588$.
Nu är $\underline{v} = -6.588$ och $\bar{v} = -6.588$. Stopp, ty $\underline{v} = \bar{v}$.

Dantzig-Wolfedekomposition: Subproblemet

$$
\begin{array}{rlrcll}
v^* = & \min & c^T x & & & \\
& \text{då} & A_1 x & \le & b_1 & (1) \\
& & A_2 x & \le & b_2 & (2) \\
& & x & \ge & 0 & (3)
\end{array} \qquad \text{(P)}
$$

Applicera Lagrangedualitet på bivillkor 1 i P.

$$v_L = \max \varphi(u_1) \ \text{ då } u_1 \ge 0 \qquad \text{(PL)}$$

För att evaluera den duala funktionen $\varphi(u_1)$ i en viss punkt, $\bar{u}_1$, löser vi det *duala subproblemet* DS för u_1 fixerat till $\bar{u}_1$.

$$
\begin{array}{rlrcl}
\varphi(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T (A_1 x - b_1) & & \\
& \text{då} & A_2 x & \le & b_2 \\
& & x & \ge & 0
\end{array} \qquad \text{(DS)}
$$

DS är en Lagrangerelaxation. Vi vet att $v_L = v^*$, $\varphi(u_1) \le v^*$ för alla $u_1 \ge 0$, och att styrbarheten av subproblemet är begränsad, dvs. $\bar{u}_1 = u_1^*$ i DS ger troligen inte $x = x^*$.

Dantzig-Wolfedekomposition: Masterproblemet

Den tillåtna mängden till DS, $X = \{x : A_2 x \le b_2, x \ge 0\}$, är en begränsad polyeder, med ett ändligt antal extrempunkter, $x^{(k)}$ för $k \in P_X$.

DS är ett LP-problem, så optimum antas i en av extrempunkterna, $x^{(k)}$.

Lösa DS betyder finna den bästa extrempunkten.

$$\varphi(u_1) = \min_{x \in X} c^T x + u_1^T (A_1 x - b_1) = \min_{k \in P_X} c^T x^{(k)} + u_1^T (A_1 x^{(k)} - b_1)$$

Sätt in detta i PL, som är $v_L = \max \varphi(u_1)$ då $u_1 \ge 0$.

$$
\begin{array}{rll}
v^* = & \max & q \\
& \text{då} & q \le c^T x^{(k)} + u_1^T (A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P_X \quad (1) \\
& & u_1 \ge 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3)
\end{array} \qquad \text{(PLD)}
$$

PL och PLD has samma optimala u_1.

Dantzig-Wolfedekomposition: Masterproblemet

LP-dualen till PLD är

$$
\begin{array}{rlll}
v^* = & \min & \sum\limits_{k \in P_X} c^T x^{(k)} \lambda_k & \\
& \text{då} & \sum\limits_{k \in P_X} (A_1 x^{(k)} - b_1) \lambda_k \le 0 & (1) \\
& & \sum\limits_{k \in P_X} \lambda_k = 1 & (2) \\
& & \lambda_k \ge 0 \ \ \forall k \in P_X & (3)
\end{array} \qquad \text{(PLP)}
$$

PLP kan direkt fås från P genom att göra substitutionen

$$x = \sum_{k \in P_X} \lambda_k x^{(k)} \quad \text{där} \quad \sum_{k \in P_X} \lambda_k = 1, \lambda_k \ge 0 \ \forall k \in P_X.$$

DS ser till att $x \in X$, men målfunktion och bivillkor 1 från P behövs.

Dantzig-Wolfedekomposition: Masterproblemet

PLP har ingen *ingen brist på styrbarhet*, så optimallösningen till PLP ger en optimal lösning till P.

Sats

Om $\bar{\lambda}$ är optimal i PLP, så är $\bar{x} = \sum\limits_{k \in P_X} \bar{\lambda}_k x^{(k)}$ optimal i P.

Antalet extrempunkter i P_X är stort, så PLP är stort.

Lös PLP med *kolumngenerering*, dvs. PLD med *bivillkorsgenerering*.

En approximation av PLP erhålls genom att ta med endast en delmängd av variablerna, $P'_X \subseteq P_X$, dvs. bara ta med snitt i PLD för $k \in P'_X$.

Dantzig-Wolfedekomposition: Masterproblemet

$$
\begin{array}{rlll}
v_{DM} = & \min & \sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k & \\
& \text{då} & \sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1)\lambda_k \leq 0 & (1) \\
& & \sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 & (2) \\
& & \lambda_k \geq 0 \;\; \forall k \in P'_X & (3)
\end{array}
\qquad \text{(DMP)}
$$

eller

$$
\begin{array}{rllll}
v_{DM} = & \max & q & & \\
& \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T (A_1 x^{(k)} - b_1) & \forall k \in P'_X & (1) \\
& & u_1 \geq 0 & & (3)
\end{array}
\qquad \text{(DM)}
$$

Detta kallas det begränsade duala masterproblemet, eller Dantzig-Wolfes masterproblem, och bivillkoren i DM kallas duala snitt.

DM är PLD utan vissa bivillkor, så $v_{DM} \geq v^*$.

DM kan ha samma optimala u_1-lösning som PLD även om många duala snitt saknas.

Dantzig-Wolfedekomposition: Masterproblemet

För varje $k \notin P'_X$ är λ_k en möjlig inkommande variabel i DMP och $x^{(k)}$ ger ett dualt snitt som kan läggas till i DM.

Beräkna den reducerade kostnaden för λ_k:

Duallösningen till PLP är $\bar{u}_1$ och $\bar{q}$, vilket ger reducerad kostnad

$$\hat{c}_k = c^T x^{(k)} + (A_1 x^{(k)} - b_1)^T \bar{u}_1 - \bar{q}$$

Optimum till PLP är uppnått om $\hat{c}_k \geq 0$ för alla $k \in P_X$.

Vi vill finna den variabel som har mest negativ reducerad kostnad:

$$\hat{c}_l = \min_{k \in P_X} \hat{c}_k = \min_{k \in P_X} c^T x^{(k)} + (A_1 x^{(k)} - b_1)^T \bar{u}_1 - \bar{q}$$

Dantzig-Wolfedekomposition: Masterproblemet

Istället för att söka igenom alla extrempunkter i X för att hitta $\min_{k \in P_X} \hat{c}_k$

löser vi $\min_{x \in X} c^T x + (A_1 x)^T \bar{u}_1$ dvs.

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & c^T x + \bar{u}_1^T A x & & \\
\text{då} & A_2 x & \leq & b_2 \\
& x & \geq & 0
\end{array}
$$

vilket är det duala subproblemet DS.

DS ger lösningen $x^{(l)}$, vilket ger en λ_l-variabel som ska tas in i basen om $\hat{c}_l < 0$.

Vi har $\bar{q} = v_{DM}$ och $\varphi(\bar{u}_1) = c^T x^{(l)} + (A_1 x^{(l)} - b_1)^T \bar{u}_1$, så $\hat{c}_l = \varphi(\bar{u}_1) - v_{DM}$.

Vi vet att $v_{DM} \geq v^*$ och $\varphi(\bar{u}_1) \leq v^*$, så $\hat{c}_k < 0$ om $\varphi(\bar{u}_1) < \bar{q}$ (dvs. undre gränsen från DS är strikt mindre än övre gränsen från DM).

Vi har optimum om $\hat{c}_k = 0$, dvs. om $\varphi(\bar{u}_1) = \bar{q}$.

DS ger alltså den bästa inkommande variabeln till DMP.

Dantzig-Wolfedekomposition: Algoritmen

1. Skaffa en dual startlösning, $\bar{u}_1$, och ev. några primala extremlösningar, $x^{(k)}$, i X. Initialisera P'_X, $\underline{v} = -\infty$ och $\bar{v} = \infty$. Sätt $k = 1$.
2. Lös det duala subproblemet DS med $\bar{u}_1$, vilket ger en primal extrempunkt $x^{(k)}$ och värdet $\varphi(\bar{u}_1)$.
   Om $\varphi(\bar{u}_1) > \underline{v}$ sätt $\underline{v} = \varphi(\bar{u}_1)$.
   Uppdatera P'_X.
3. Opttest: Om $\underline{v} = \bar{v}$ gå till 6.
4. Lös det duala masterproblemet, DM (och DMP) med alla kända primala lösningar, $x^{(k)} \; \forall k \in P'_X$.
   Detta ger $\bar{\lambda}$, en ny dual punkt $\bar{u}_1$ och en övre gräns $\bar{v} = v_{DM}$.
5. Opttest: Om $\underline{v} = \bar{v}$ gå till 6. Annars sätt $k = k + 1$ och gå till 2.
6. Stopp. Optimallösningen till P är $\bar{x} = \sum_{k \in P'_X} \bar{\lambda}_k x^{(k)}$.

Kommentar: Målfunktionsvärdet för DM minskar i varje steg, men för DS ökar inte säkert $\varphi(\bar{u}_1)$ i varje iteration.

Dantzig-Wolfedekomposition: Algoritmen

Vi itererar mellan det duala subproblemet, DS, och det duala masterproblemet, DM (eller DMP).

Subproblemet ger en undre gräns och masterproblemet en övre.

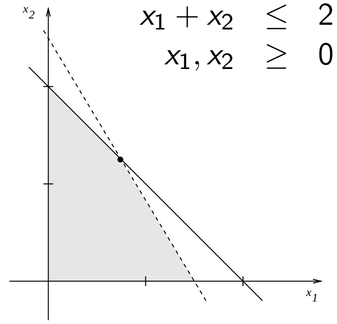
Masterproblemet ger $\bar{u}_1$ till subproblemet, och subproblemet ger ett nytt $x^{(k)}$ till masterproblemet.

Masterproblemet indikerar om det nödvändiga extrempunkter saknas och subproblemet genererar sådana punkter, dvs. snitt/kolumner som behövs.

Eftersom det endast finns ett ändligt antal möjliga snitt, konvergerar detta till exakt optimum på ett ändligt antal steg.

Dantzig-Wolfedekomposition: Ett numeriskt exempel

$$
\begin{array}{rllcll}
v^* = & \min & -5x_1 - 4x_2 & & & \\
& \text{då} & 10x_1 + 6x_2 & \leq & 15 & (1) \\
& & x_1 + x_2 & \leq & 2 & (2) \\
& & x_1, x_2 & \geq & 0 & (3)
\end{array}
\qquad \text{(PE)}
$$



Lagrangerelaxera bivillkor 1. $X = \{x : x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0\}$.

Det duala subproblemet är

$$\varphi(\bar{u}_1) = \min_{x \in X} -5x_1 - 4x_2 + \bar{u}_1(10x_1 + 6x_2 - 15) \qquad \text{(DSE)}$$

eller
$$\varphi(\bar{u}_1) = \min_{x \in X} \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2 - 15\bar{u}_1$$

där $\bar{c}_1 = (-5 + 10\bar{u}_1)$ och $\bar{c}_2 = (-4 + 6\bar{u}_1)$.

Dantzig-Wolfedekomposition: Ett numeriskt exempel

Det duala masterproblemet (DME) blir

$$
\begin{array}{rll}
v_{DM} = & \max & q \\
& \text{då} & q \leq -5x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)} + u_1(10x_1^{(k)} + 6x_2^{(k)} - 15) \ \ \forall k \in P'_X \\
& & u_1 \geq 0
\end{array}
$$

där $x^{(k)}$ är lösningarna från DSE.

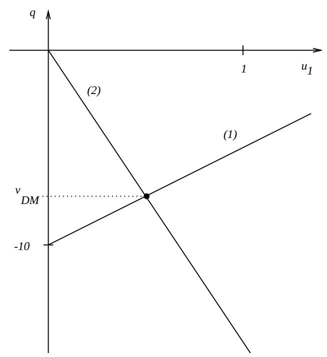
Vi startar med $\bar{u}_1 = 0$, vilket ger optimallösningen $x_1^{(1)} = 2,\ x_2^{(1)} = 0$, $\varphi(0) = -10$, och den undre gränsen är $\underline{v} = -10$.

Är origo tillåtet i X? Ja. Ta med den punkten: $x_1^{(2)} = 0,\ x_2^{(2)} = 0$.

Det duala masterproblemet blir

$$
\begin{array}{rlll}
v_{DM} = & \max & q & \\
& \text{då} & q \leq -10 + 5u_1 & (1) \\
& & q \leq -15u_1 & (2) \\
& & u_1 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dantzig-Wolfedekomposition: Ett numeriskt exempel



Optimallösning till DME är i skärningen $-10 + 5u_1 = -15u_1$, vilket ger $u_1 = 0.5$ och $v_{DM} = -7.5$.

Vi har nu $\bar{v} = -7.5$ och $\underline{v} = -10$.

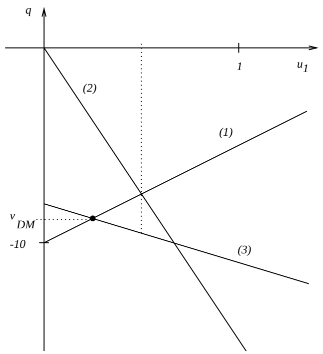
Lös nu DSE i $\bar{u}_1 = 0.5$: $\quad \varphi(0.5) = \min_{x \in X} 0x_1 - 1x_2 - 7.5$

vilket ger $x_1^{(3)} = 0,\ x_2^{(3)} = 2$, och $\varphi(0.5) = -9.5$, så $\underline{v} = -9.5$.

Dantzig-Wolfedekomposition: Ett numeriskt exempel

Masterproblemet är nu

$$
\begin{array}{rll}
v_{DM} = & \max & q \\
& \text{då} & q \leq -10 + 5u_1 \qquad (1) \\
& & q \leq -15u_1 \qquad (2) \\
& & q \leq -8 - 3u_1 \qquad (3) \\
& & u_1 \geq 0
\end{array}
$$



Optimum: $u_1 = 0.25$ och $v_{DM} = q = -8.75$.

Nu har vi $\bar{v} = -8.75$ och $\underline{v} = -9.5$.

Dantzig-Wolfedekomposition: Ett numeriskt exempel

Lös nu DSE i $\bar{u}_1 = 0.25$.

$$\varphi(0.25) = \min_{x \in X} -2.5x_1 - 2.5x_2 - 3.75$$

Optimallösning: $x_1^{(4)} = 2,\ x_2^{(4)} = 0$, (eller $x_1^{(4)} = 0,\ x_2^{(4)} = 2$) och $\varphi(0.25) = -8.75$.

Nu är $\underline{v} = \bar{v} = -8.75$, så algoritmen avslutas.

Vi vet att $v^* = -8.75$, och att $u_1^* = 0.25$, men för att få x^* behöver vi λ.

$$
\begin{array}{rll}
v_{DM} = & \min & -10\lambda_1 + 0\lambda_2 - 8\lambda_3 \\
& \text{då} & -5\lambda_1 + 15\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 0 \\
& & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\
& & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{array}
$$

Lösningen $\lambda_1 = 3/8,\ \lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 5/8$, ger

$$x^* = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} = (0.75, 1.25)$$

(Obs: x-lösningen till DSE är inte optimal i PE.)