Bendersdekomposition

Blandade heltalsproblem med ett stort antal kontinuerliga variabler och få heltalsvariabler.

Mycket lättare att lösa om heltalsvariablerna fixeras.

Bendersdekomposition (primal dekomposition) kan utnyttja denna struktur.

Man löser ett linjärt subproblem där vissa (svåra) variabler fixerats.

Detta ger en tillåten lösning och en pessimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet.

Ett masterproblem använder alla kända subproblemlösningar, ger nya värden på de svåra variablerna, och ger en optimistisk uppskattning.

Masterproblemet ackumulerar subproblemlösningar och ger till slut de korrekta optimala värdena på de svåra variablerna.

Dessa värden ger i subproblemet resten av den optimala lösningen.

(Omvänd Dantzig-Wolfedekomposition.)

Bendersdekomposition: Numeriskt exempel

$$\begin{array}{lll} z = & \min & -3x_1 - 2x_2 + y \\ & \text{då} & 12x_1 + 17x_2 - 10y \leq 20 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2 \\ & & 0 \leq y \leq 10, \text{ heltal} \end{array}$$

Fixera y, vilket ger subproblemet

$$\begin{array}{lll} \psi(\bar{y}) = & \min & -3x_1 - 2x_2 + \bar{y} \\ & \text{då} & 12x_1 + 17x_2 \leq 20 + 10\bar{y} \\ & & x_1 \leq 2 \\ & & x_2 \leq 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

LP-dualen av detta blir

$$\begin{array}{lll} \psi(\bar{y}) = & \max & (-20 - 10\bar{y})u_1 - 2u_2 - 2u_3 + \bar{y} \\ & \text{då} & -12u_1 - u_2 \leq -3 \\ & & -17u_1 - u_3 \leq -2 \\ & & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array}$$

När vi löser detta LP-problem fås både primal och dual lösning.

Bendersdekomposition: Numeriskt exempel

Benderssnitt konstrueras ur den duala målfunktionen:

$\psi(\bar{y}) = \max(-20 - 10\bar{y})u_1 - 2u_2 - 2u_3 + \bar{y}$

som

$q \geq (-20 - 10y)u_1^{(k)} - 2u_2^{(k)} - 2u_3^{(k)} + y$

eller

$q \geq (1 - 10u_1^{(k)})y - 20u_1^{(k)} - 2u_2^{(k)} - 2u_3^{(k)}$

Börja med t.ex. $\bar{y} = 0$.

$$\begin{array}{lll} \psi(0) = & \min & -3x_1 - 2x_2 \\ & \text{då} & 12x_1 + 17x_2 \leq 20 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array}$$

Lösningen blir $x_1 = 5/3 \approx 1.667$, $x_2 = 0$ och $\psi(0) = -5$, samt $u_1 = 0.25$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. Det ger $\bar{v} = -5$, och snittet $q \geq -1.5y - 5$.

Bendersdekomposition: Numeriskt exempel

Benders masterproblem:

min q då $q \geq -1.5y - 5$, $0 \leq y \leq 10$, heltal,

har lösningen $y = 10$, $q = -20$, vilket ger $\underline{v} = -20$.

För $\bar{y} = 10$ ger subproblemet $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $\psi(10) = 0$, samt $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 2$, vilket ger snittet $q \geq y - 10$.

Benders masterproblem:

min q då $q \geq -1.5y - 5$, $q \geq y - 10$, $0 \leq y \leq 10$, heltal,

har lösningen $y = 2$, $q = -8$, vilket ger $\underline{v} = -8$.

För $\bar{y} = 2$ ger subproblemet $x_1 = 2$, $x_2 = 16/17 \approx 0.941$, $\psi(2) = -100/17 \approx -5.882$, samt $u_1 = 2/17 \approx 0.117$, $u_2 = 27/17 \approx 1.588$, $u_3 = 0$, vilket ger snittet $q \geq -3/17y - 94/17$, ung. $q \geq -0.176y - 5.529$.

Vi har nu $\bar{v} = -5.882$ och $\underline{v} = -8$.

Bendersdekomposition: Numeriskt exempel

Benders masterproblem:
min q då $q \geq -1.5y - 5$, $q \geq y - 10$, $q \geq -3/17y - 94/17$, $0 \leq y \leq 10$, heltal,

har lösningen $y = 3$, $q = -6.058$, vilket ger $\underline{v} = -6.058$.

Vi har nu $\bar{v} = -5.882$ och $\underline{v} = -6.058$.

För $\bar{y} = 3$ ger subproblemet $x_1 = 2$, $x_2 = 1.529$, $\psi(3) = -6.058$, samt $u_1 = 2/17 \approx 0.117$, $u_2 = 27/17 \approx 1.588$, $u_3 = 0$, vilket ger $\bar{v} = -6.058$.

Vi har nu $\bar{v} = -6.058$ och $\underline{v} = -6.058$, vilket indikerar optimum.

Lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 1.529$, $y = 3$ och $v^* = -6.058$.

Bendersdekomposition: Subproblemet

Vi ska lösa

$$\begin{array}{rlrcll} v^* = & \min & c^T x + f(y) & & & \\ & \text{då} & Ax + G(y) & \leq & b & (1) \\ & & x \geq 0 & & & (2) \\ & & y \in S & & & (3) \end{array} \qquad (P)$$

där S är en ändlig mängd av heltal.

y är "svåra" variabler.

Separera optimeringen i x och y:

$$v_P = \min \psi(y) \ \text{ då } y \in S \qquad (PP)$$

där, för varje $y \in S$,

$$\begin{array}{rll} \psi(y) = f(y) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(y) \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad (PPS)$$

Antag (tillfälligt) att PPS har en tillåten lösning för alla $y \in S$.

Bendersdekomposition: Subproblemet

Använd LP-dualitet på PPS (med avseende på x):

$$\begin{array}{rll} \psi(y) = f(y) + & \max & (G(y) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \qquad (PDS)$$

$U = \{u : -A^T u \leq c, u \geq 0\}$ är en polyeder.

$$\psi(y) = f(y) + \max_{u \in U} (G(y) - b)^T u$$

För att evaluera funktionen $\psi(y)$ i en viss punkt $\bar{y}$, kan vi lösa det primala subproblemet PS för y fixerad till $\bar{y}$.

$$\begin{array}{rll} \psi(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & u \in U \end{array} \qquad (PS)$$

eller

$$\begin{array}{rll} \psi(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad (PSP)$$

PS ger lösningen $\bar{u}$, så $\psi(\bar{y}) = f(\bar{y}) + (G(\bar{y}) - b)^T \bar{u}$ och $\psi(\bar{y}) \geq v^*$.

Bendersdekomposition: Masterproblemet

Den tillåtna mängden till PS, U, är en polyeder och har ett ändligt antal extrempunkter, $u^{(k)}$ för $k \in P_U$.

(Observera att U är oberoende av y.)

Optimum antas alltid i en extrempunkt.

$$\psi(y) = f(y) + \max_{k \in P_U} (G(y) - b)^T u^{(k)}$$

$\psi(y)$ är en konvex funktion.

Använd denna beskrivning av $\psi(y)$ i PP.

$$\begin{array}{rlll} v^* = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} \quad \forall k \in P_U & (1) \\ & & y \in S & (2) \end{array} \qquad (PPM)$$

PPM är ekvivalent med P men med $\psi(y)$ beskriven på ett annat sätt.

Man kan visa att $q = v^*$ och $y = y^*$ är en optimal lösning till PPM.

Bendersdekomposition: Masterproblemet

Antalet extrempunkter, $|P_U|$, är ofta mycket stort.

Därför kommer vi att lösa PPM med bivillkorsgenerering.

En approximation av PPM erhålls genom att endast ta med en delmängd av snitten, $P'_U \subseteq P_U$.

$$
\begin{array}{llll}
v_{PM} = & \min & q & \\
 & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} \quad \forall k \in P'_U & (1) \\
 & & y \in S & (2)
\end{array} \qquad \text{(PM)}
$$

PM kallas det *primala masterproblemet* eller Benders masterproblem, och bivillkoren kallas snitt.

Eftersom vissa snitt saknas, är beskrivningen av $\psi(y)$ ofullständig och PM är en relaxation av P.

Det räcker att $\psi(y)$ är tillräckligt väl beskrivet runt y^* för att PM ska ge samma optimala y-lösning som P.

Bendersdekomposition: Algoritmen

1. Skaffa en startlösning, $\bar{y}$, och ev. några duala extremlösningar, $u^{(k)}$. Initialisera P'_U och sätt $\underline{v} = -\infty$ och $\bar{v} = \infty$. Sätt $k = 1$.
2. Lös subproblemet, PS, med $\bar{y}$. Detta ger en dual extremlösning: $u^{(k)}$, värdet $\psi(\bar{y})$ och en primal lösning, $\bar{x}$. Uppdatera P'_U. Om $\psi(\bar{y}) < \bar{v}$ sätt $\bar{v} = \psi(\bar{y})$.
3. Opttest: Om $\underline{v} = \bar{v}$ gå till 6.
4. Lös masterproblemet, PM, med alla kända duala lösningar $u^{(k)}\ \forall k \in P'_U$. Då erhålls ett nytt $\bar{y}$ och en undre gräns $\underline{v} = v_{PM}$.
5. Opttest: Om $\underline{v} = \bar{v}$ gå till 6. Annars: Sätt $k = k + 1$ och gå till 2.
6. Stopp. Optimallösningen till P är $(\bar{x}, \bar{y})$.

Bendersdekomposition: Algoritmen

I Bendersdekomposition itererar man mellan PS och PM.

Att lösa PS i en viss punkt $\bar{y}$ ger ett snitt med det högsta värdet i den punkten.

Att lösa PM med en delmängd av nödvändiga snitt ger det lägsta möjliga värdet med hänsyn till de medtagna snitten.

Om det saknas snitt som borde vara aktiva i y^*, kommer PM att ge en punkt där något snitt är överskridet, och PS ger ett av de saknade, överskridna snitten.

Dett finns ett ändligt antal snitt, och ett nytt snitt genereras varje iteration, så vi får *ändlig exakt konvergens* till den optimala lösningen.

Masterproblemet, PM, kommer att ackumulera information och därmed ge bättre under gräns i varje iteration.

Subproblemet, PS, genererar saknade snitt, och ger övre gränser, men inte alltid bättre.

Bendersdekomposition

Vad händer om PSP saknar tillåten lösning (dvs. PS har obegränsad lösning) för vissa $\bar{y}$?

Låt $Y = \{y \in S : \exists x \geq 0, Ax \leq b - G(y)\}$.

(Y är de y som gör att PSP har en tillåten lösning)

Skriv om (LP-dualitet):
$Y = \{y \in S : (G(y) - b)^T u \leq 0\ \forall u \geq 0, -A^T u \leq 0\}$.

vilket ger $Y = \{y \in S : (G(y) - b)^T \tilde{u} \leq 0\ \forall \tilde{u} : \tilde{u} \text{ är en riktning i } U\}$.

När vi löser PS, får vi redan på om $\bar{y} \in Y$.

Om inte, får vi en obegränsad lösning med riktningen $\tilde{u}$, och vet att $(G(\bar{y}) - b)^T \tilde{u} > 0$.

Bendersdekomposition: Masterproblemet

Den tillåtna mängden till PS, U, är en polyeder och har ett ändligt antal extrempunkter, $u^{(k)}$ för $k \in P_U$, och extremriktningar, $\tilde{u}^{(k)}$ för $k \in R_U$.

Om PS har obegränsad lösning fås en av dessa riktningar.

$$Y = \{y \in S : (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} \leq 0 \; \forall k \in R_U\}.$$

Intuitivt: Om $(G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} > 0$, så skulle den tillåtna riktningen $\tilde{u}^{(k)}$ få $\psi(y)$ att växa obehindrat när vi löser PS.

Vi vill minimera $\psi(y)$, så en punkt $\bar{y}$ som gör $\psi(\bar{y})$ oändligt stor är mycket dålig, och bör undvikas.

Masterproblemet blir nu:

$$\begin{array}{llllr} v_{PM} = & \min & q & & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U & (1) \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U & (2) \\ & & y \in S & & (3) \end{array} \qquad \text{(PM)}$$

De första bivillkoren kallas *värdesnitt* och de andra *tillåtenhetssnitt*.

Bendersdekomposition: Algoritmen

1. Saffa en startlösning, $\bar{y}$, och ev. några duala extremlösningar, $u^{(k)}$ och $\tilde{u}^{(k)}$. Initialisera P'_U, R'_U och sätt $\underline{v} = -\infty$ och $\bar{v} = \infty$. Sätt $k = 1$.
2. Lös subproblemet, PS, med $\bar{y}$. Detta ger en dual extremlösning: antingen en punkt, $u^{(k)}$, värdet $\psi(\bar{y})$ och en primal lösning, $\bar{x}$, eller en riktning, $\tilde{u}^{(k)}$.
   Uppdatera P'_U eller R'_U. Om $\psi(\bar{y}) < \bar{v}$ sätt $\bar{v} = \psi(\bar{y})$.
3. Opttest: Om $\underline{v} = \bar{v}$ gå till 6.
4. Lös masterproblemet, PM, med alla kända duala lösningar $u^{(k)} \; \forall k \in P'_U$ och $\tilde{u}^{(k)} \; \forall k \in R'_U$.
   Om PM saknar tillåten lösning: Stopp. P saknar tillåten lösning.
   Annars erhålls ett nytt $\bar{y}$ och en undre gräns $\underline{v} = v_{PM}$.
5. Opttest: Om $\underline{v} = \bar{v}$ gå till 6. Annars: Sätt $k = k + 1$ och gå till 2.
6. Stopp. Optimallösningen till P är $(\bar{x}, \bar{y})$.

Bendersdekomposition: Approximativa lösningar

Sats

Varje punkt eller riktning i U ger ett giltigt snitt.

Försök generera flera punkter i U initialt.

Lös LP-relaxationen av PM i tidiga iterationer:

Man kan generera ganska intressanta snitt även om $\bar{y}$ är inte heltal, med mycket mindre arbete i masterproblemet.

Mot slutet av metoden får man dock lösa PM exakt för att få rätt optimallösning.

Bendersdekomposition: Ett numeriskt exempel

Vi ska lösa följande problem.

$$\begin{array}{lllllr} v^* = & \min & -3x_1 - 4x_2 & -5y & & \\ & \text{då} & x_1 + x_2 & +3y & \leq 8 & (1) \\ & & 2x_1 + 4x_2 & -y & \leq 3 & (2) \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & & (3) \\ & & 0 \leq y \leq 3, \text{ heltal} & & & (4) \end{array} \qquad \text{(P)}$$

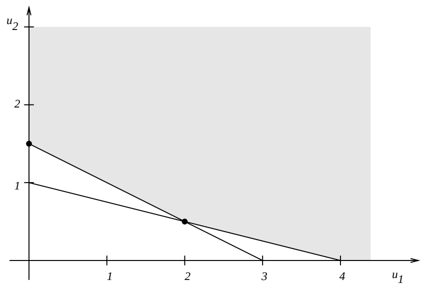
Det primala subproblemet fås genom att fixera y

$$\begin{array}{llllr} \psi(\bar{y}) = & \min & -3x_1 - 4x_2 - 5\bar{y} & & \\ & \text{då} & x_1 + x_2 & \leq 8 - 3\bar{y} & (1) \\ & & 2x_1 + 4x_2 & \leq 3 + \bar{y} & (2) \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & (3) \end{array} \qquad \text{(PSP)}$$

eller, med hjälp av LP-dualitet,

$$\begin{array}{llllr} \psi(\bar{y}) = & \max & (3\bar{y} - 8)u_1 + (-\bar{y} - 3)u_2 - 5\bar{y} & & \\ & \text{då} & -u_1 - 2u_2 & \leq -3 & (1) \\ & & -u_1 - 4u_2 & \leq -4 & (2) \\ & & u_1, u_2 \geq 0 & & (3) \end{array} \qquad \text{(PS)}$$

Bendersdekomposition: Ett numeriskt exempel



$U = \{(u_1, u_2) : -u_1 - 2u_2 \le -3,\ -u_1 - 4u_2 \le -4,\ u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0\}$.

Det primala masterproblemet blir

$$\begin{array}{lll} v_{PM} = & \min & q \\ & \text{då} & q \ge (3y-8)u_1^{(k)} + (-y-3)u_2^{(k)} - 5y \quad \forall k \in P'_U \\ & & 0 \ge (3y-8)\tilde{u}_1^{(k)} + (-y-3)\tilde{u}_2^{(k)} \quad \forall k \in R'_U \\ & & 0 \le y \le 3,\ \text{heltal} \end{array} \qquad \text{(PM)}$$

Bendersdekomposition: Ett numeriskt exempel

Vi startar med $\bar{y} = 0$: $\psi(0) = \max_{u \in U} -8u_1 - 3u_2$

Lösningen är $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 1.5$, så $\psi(0) = -4.5$, och $\bar{v} = -4.5$.

Masterproblemet blir

$$\begin{array}{lll} v_{PM} = & \min & q \\ & \text{då} & q \ge -6.5y - 4.5 \\ & & 0 \le y \le 3,\ \text{integer} \end{array}$$

Optimum är $y = 3$ och $v_{PM} = q = -24$, samt $\underline{v} = -24$. ($\bar{v} = -4.5$.)

Nu löser vi PS i $\bar{y} = 3$: $\psi(\bar{y}) = \max_{u \in U} u_1 - 6u_2 - 15$.

Lösningen obegränsad, med riktningen $\tilde{u}^{(1)} = (1, 0)$.

Vi får tillåtenhetssnitt $0 \ge (3y - 8)1$, vilket kan skrivas som $3y \le 8$.

Masterproblemet blir

$$\begin{array}{llll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \ge -6.5y - 4.5 & (1) \\ & & 3y \le 8 & (2) \\ & & 0 \le y \le 3,\ \text{integer} & \end{array}$$

Bendersdekomposition: Ett numeriskt exempel

Om man inte vill använda tillåtenhetssnitt:

Lösning av PS i $\bar{y} = 3$: $\psi(\bar{y}) = \max_{u \in U} u_1 - 6u_2 - 15$

fås genom att öka u_1 väldigt mycket.

Vi approximerar oändligheten med 1000, dvs. väljer den begränsade lösningen $u^{(2)} = (1000, 0)$, med målfunktionsvärde $\psi(\bar{y}) = 985$, vilket inte förbättrar vår övre gräns.

Det nya snittet blir $q \ge 1000(3y - 8) - 5y$, dvs. $q \ge 2995y - 8000$.

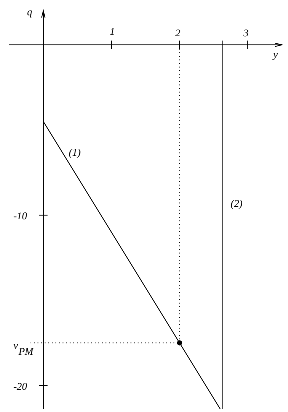
Detta ersätter tillåtenhetssnittet $3y \le 8$, och q blir stort om $y > 8/3$.

Om $y = 3$ så blir $q = 985$, vilket är väldigt dåligt.

Slutsatsen är att det approximativa snittet ger ungefär samma effekt som tillåtenhetssnittet.

Eftersom masterproblemet är ett heltalsproblem, kommer precis samma y-lösning att fås i detta fall.

Bendersdekomposition: Ett numeriskt exempel



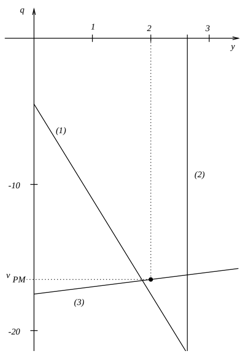
Den optimala lösningen är $y = 2$, där $v_{PM} = q = -17.5$, så $\underline{v} = -17.5$, medan $\bar{v} = -4.5$.

Nu löser vi PS i $\bar{y} = 2$, och får optimallösningen $u^{(2)} = (2, 0.5)$, och $\psi(2) = -16.5$.

Vi har nu $\bar{v} = -16.5$ och $\underline{v} = -17.5$.

Bendersdekomposition: Ett numeriskt exempel

$$
\begin{array}{rll}
v_{PM} = & \min & q \\
& \text{då} & q \geq -6.5y - 4.5 \qquad (1) \\
& & 3y \leq 8 \qquad (2) \\
& & q \geq 0.5y - 17.5 \qquad (3) \\
& & 0 \leq y \leq 3, \text{ integer}
\end{array}
$$



Optimallösningen blir nu $y = 2$. Detta ger $v_{PM} = q = -16.5$, så $\underline{v} = \bar{v} = -16.5$ och algoritmen avslutas.

Optimallösningen är $v^* = -16.5$ och $y^* = 2$. Den optimala x-lösningen fås från PSP i $\bar{y} = 2$: $x_1 = 1.5$ och $x_2 = 0.5$.