Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta s
Lösning till tentamen
2012-12-19

Lösningar/svar

Uppgift 1

Definitionerna är standard för lagerhållningsproblem (se boken).
Speciellt: Tillstånd s_k är lagernivån efter månad k.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - x_k + d_k$ (där d är försäljningen).

Iteration 1: Man måste ha $x_1 = s_1 + 1$, och får $f_1(s_1) = (5, 10, 14)$ för $s_1 = 0, 1, 2$ (andra värden på s_1 kan ej förekomma).

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5
0	-	-	-	-	-	-
1	19	-	-	-	-	-
2	17	24	-	-	-	-
3	13	21	28	-	-	-
$f_2(s_2)$	13	21	28	-	-	-
$\hat{x}_2(s_2)$	3	3	3	-	-	-

Iteration 3: (tar med både $s_3 = 0$ för uppgift a och $s_3 = 3$ för uppgift b)

$x_3 \backslash s_3$	0	3
0	28	-
1	26	-
2	20	-
3	-	36
$f_3(s_3)$	20	36
$\hat{x}_3(s_3)$	2	3

Uppnystning a: $s_3 = 0$, $x_3 = 2$, $s_2 = 0$, $x_2 = 3$, $s_1 = 0$, $x_3 = 1$ ($s_0 = 4$).
Dvs. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $z = 20$.

Svar i ord: Köp 1 slunga i december, 3 slungor i januari och 2 i februari. Lagra inget.

Uppnystning b: $s_3 = 3$, $x_3 = 3$, $s_2 = 2$, $x_2 = 3$, $s_1 = 2$, $x_3 = 3$ ($s_0 = 4$).
Dvs. $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, $z = 36$.

Svar i ord: Köp 3 slungor varje månad. Lagra 2 efter december och 2 efter januari.

Kostnaden ökar med 16.

Uppgift 2

2a: max $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4$ då $4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 11$, $x_j \in \{0, 1\}$

eller

min $f(x) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 4x_4$ då $g(x) = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 11 \leq 0$, $x_j \in \{0, 1\}$

2b: $L(x, u) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 + u(4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 11) = (4u - 2)x_1 + (5u - 3)x_2 + (4u - 4)x_3 + (5u - 4)x_4 - 11u$

$u = 0$: min $L(x, 0) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 4x_4$ ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, subgradienten $\xi = 7 > 0$ (lösningen otillåten) samt $\varphi(0) = -13$, så $\underline{v} = -13$.

$u = 2$: min $L(x, 2) = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 22$ ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, subgradienten $\xi = -11 < 0$ (lösningen tillåten) samt $\varphi(2) = -22$ och $\bar{v} = 0$.

$u = 1$: min $L(x, 1) = 2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + x_4 - 11$ ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, x_3 egal, $x_4 = 0$, och $\varphi(0) = -11$, så $\underline{v} = -11$.

Om vi sätter $x_3 = 0$ fås subgradienten $\xi = -11 < 0$ (lösningen tillåten) och $\bar{v} = 0$. Om vi sätter $x_3 = 1$ fås subgradienten $\xi = -7 < 0$ (lösningen tillåten) och $\bar{v} = -4$.

Nu ligger duala optimum mellan $u = 0$ (där $\xi > 0$) och $u = 1$ (där $\xi < 0$).

$u = 0.5$: min $L(x, 0.5) = 0x_1 - 0.5x_2 - 2x_3 - 1.5x_4 - 5.5$ ger x_1 egal, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(0) = -9.5$, så $\underline{v} = -9.5$.

Om vi sätter $x_1 = 0$ fås subgradienten $\xi = 3 > 0$ (lösningen otillåten). Om vi sätter $x_1 = 1$ fås subgradienten $\xi = 7 > 0$ (lösningen otillåten).

Nu ligger duala optimum mellan $u = 0.5$ (där $\xi > 0$) och $u = 1$ (där $\xi < 0$).

$u = 0.75$: min $L(x, 0.75) = x_1 + 0.75x_2 - x_3 - 0.25x_4 - 8.25$ ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(0) = -9.5$, samt subgradienten $\xi = -2 < 0$ (lösningen tillåten) och $\bar{v} = -8$.

Nu ligger duala optimum mellan $u = 0.5$ (där $\xi > 0$) och $u = 0.75$ (där $\xi < 0$).
Vi har $-9.5 \leq v^* \leq -8$. Dvs. vi har en tillåten lösning med värdet -8 och vet att optimum inte kan vara bättre än -9.5, vilket kan avrundas till -9 eftersom lösningen ska vara heltalig.

Rita en konkav, styckvis linjär funktion med följande data:

u	värde	lutning
0	-13	7
0.5	-9.5	3 (eller 7)
0.75	-9.5	-2 (eller -7)
1	-11	-7
2	-22	-11

Uppgift 3

3a: Relaxera (3): Subproblemet separeras i x och y. y-problemet har inga andra bivillkor än $y_i \in \{0, 1\}$, så man sätter helt enkelt $y_i = 1$ om $\hat{f}_i < 0$ (där $\hat{f}_i = f_i - \sum_j \alpha_{ij}$ och α är Lagrangemultiplikatorerna) och $y_i = 0$ om $\hat{f}_i \geq 0$.

x-problemet är separabelt i kunder, så kund j ska få all sin efterfrågan skickad från den fabrik som har minsta kostnad $\hat{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_{ij}$.

En subgradient fås som $\xi_{ij} = x_{ij} - y_i$. Se för övrigt algoritmen på sida 452 i boken.

Alternativ: Relaxera (2): Subproblemet separeras i ett problem för varje fabrik. Man måste inte skicka något, men om $\hat{c}_{ij} = c_{ij} + \beta_{ij} < 0$ (där β är Lagrangemultiplikatorerna) sätter man $x_{ij} = y_i$. Detta gör att fabrik i får reducerade kostnaden
$\hat{f}_i = f_i + \sum_j (\min(0, \hat{c}_{ij}))$, så man sätter $y_i = 1$ om $\hat{f}_i \leq 0$ och $y_i = 0$ om $\hat{f}_i > 0$.

En subgradient fås som $\xi_j = \sum_i x_{ij} - 1$. Se för övrigt algoritmen på sida 452 i boken.

3b: Fixera y i subproblemet, vilket blir ett enkelt tudelat minkostnadsflödesproblem. Benderssnitten beräknas ungefär som i projekt 4, dvs. baseras på målfunktionen till LP-dualen av subproblemet. Masterproblemet löses med GLPK och ger undre gränser. Subproblemet ger övre gränser. Mer detaljer återfinnes i kursmaterialet.

Uppgift 4

3a: Ja, kommer från masterproblemet där ett bivillkor läggs till i varje iteration.
Nej, kommer från subproblemet.

3b: Nej, kommer från subproblemet.
Ja, kommer från masterproblemet där ett bivillkor läggs till i varje iteration.

3c: Subproblemet ger en ny extrempunkt från den konstanta tillåtna mängden till subproblemet i varje iteration.

3d: Subproblemet ger en ny dual extrempunkt från den konstanta duala tillåtna mängden till subproblemet i varje iteration.

3e: Den pekar Euklidiskt in i det halvrum där optimum ligger, men den kanske inte är en ökningsriktning för den duala funktionen.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: Dubblera alla flödesvariabler och nodjämviktsvillkor. Fasta kostnader och kapaciteter håller ihop de två delarna (om inte alla transporter och lager etc är helt separat för de olika varorna).

5b: Fasta kostnader och flödesomvandling kan ej hanteras i ett minkostnadsflödesproblem. Skala om i delar av nätverket för att eliminera flödesomvandlingen. Heuristik: Lös ett minkostnadsflödesproblem, justera lösningen. Dekomposition: Benders.

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: Flera vägavsnitt samt ökning av laddningen vid inbromsning är enbart en fråga om indata, så dynamisk programmering klarar det. (Flera framdrivningssätt också, men jag tror inte att bilarna har det.) Begräsningar av framdrivningssätt för specifika avsnitt.

Koppling mellan olika avsnitt, såsom före och efter en korsning, förutom laddningsnivån, kan inte hanteras av dynamisk programmering.

6b: Lös direkt med GLPK. Nackdel: Många variabler ger stort träd.
Lös med heuristiker för kappsäcksproblem.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: –

7b: Det "enkla" sättet: Inför tidsindex på variablerna och lös med GLPK. Nackdel: Problemstorleken multipliceras med antal tidsperioder.

Heuristiskt alternativ: Finn optimal(a) utbyggnad(er) för första tidsperioden, ändra indata, upprepa för andra osv. Nackdel: Man tar inte hänsyn till framtiden (om utbyggnadskostnaderna beror på varandra).

Uppgift 8 (kortfattat)

8a: –

8b: Hanterbart: Olika fordon (kan göra olika saker): Begränsar möjliga byten.
Trottoarer och andra varianter av gator.
Olika förare (ger olika tider): Måste hålla reda på fordon/förare.
Väder och andra omständigheter som påverkar alla tider på ett lättberäknat sätt. Maxtider för fordon.

Svårare: Dela upp de två/tre körningarna på en gata i separata uppgifter. (Vissa är oriktade.)