Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Opt av real samm system
Lösning till tentamen
2013-03-25

Svar till uppgift 1 och 2

Uppgift 1

1a: max $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4$ då $10x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 8x_4 \leq 34$, $x_j \in \{0, 1\}$ eller min $f(x) = -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 5x_4$ då $g(x) = 10x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 8x_4 - 34 \leq 0$, $x_j \in \{0, 1\}$

1b: $L(x, u) = -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 5x_4 + u(10x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 8x_4 - 34) =$
$(10u - 3)x_1 + (10u - 4)x_2 + (12u - 6)x_3 + (8u - 5)x_4 - 34u$

$u = 0$: min $L(x, 0) = -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 5x_4$ ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, subgradienten $\xi = 6 > 0$ (lösningen otillåten) samt $\varphi(0) = -18$, så $\underline{v} = -18$.

$u = 1$: min $L(x, 1) = 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 34$ ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, subgradienten $\xi = -34 < 0$ (lösningen tillåten) samt $\varphi(2) = -34$ och $\bar{v} = 0$.

$u = 0.5$: min $L(x, 0.5) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 - 17$ ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, x_3 egal, $x_4 = 1$, och $\varphi(0) = -18$, så $\underline{v} = -18$. Sätt (exempelvis) $x_3 = 1$, vilket ger subgradienten $\xi = -14 < 0$ (lösningen tillåten) och $\bar{v} = -11$.

Duala optimum ligger mellan $u = 0$ (där $\xi > 0$) och $u = 0.5$ (där $\xi < 0$).

$u = 0.25$: min $L(x, 0.25) = -0.5x_1 - 1.5x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 8.5$ ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och subgradienten $\xi = 6 > 0$ (lösningen otillåten), samt $\varphi(0) = -16.5$, så $\underline{v} = -16.5$.

Nu ligger duala optimum mellan $u = 0.25$ (där $\xi > 0$) och $u = 0.5$ (där $\xi < 0$).

$u = 0.375$: min $L(x, 0.375) = 0.75x_1 - 0.25x_2 - 1.5x_3 - 2x_4 - 12.75$ ger $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(0) = -16.5$, samt subgradienten $\xi = -4 < 0$ (lösningen tillåten) och $\bar{v} = -15$.

Nu ligger duala optimum mellan $u = 0.25$ (där $\xi > 0$) och $u = 0.375$ (där $\xi < 0$).
Vi har $-16.5 \leq v^* \leq -15$. Dvs. vi har en tillåten lösning med värdet -15 och vet att optimum inte kan vara bättre än -16.5, vilket kan avrundas till -16 eftersom lösningen ska vara heltalig.

Rita fyra linjer med följande data och markera segmenten som ger lägst värde, vilket ger en konkav, styckvis linjär funktion.

u	värde	lutning
0	-18	6
0.25	-16.5	6
0.375	-16.5	-4
0.5	-18	-14
1	-34	-34

Uppgift 2

2a: Definitionerna är standard för kappsäcksproblem (se boken).

2b: Bivillkoret blir $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	-	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3
0	0	3	3	3
1	-	4	7	7
$f_2(s_2)$	0	4	7	7
$\hat{x}_2(s_2)$	0	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3
0	0	4	7	7
1	-	6	10	13
$f_3(s_3)$	0	6	10	13
$\hat{x}_3(s_3)$	0	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3
0	0	6	10	13
1	-	5	11	15
$f_4(s_4)$	0	6	11	15
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	1	1

Uppnystning: $s_4 = 3$, $x_4 = 1$, $s_3 = 2$, $x_3 = 1$, $s_2 = 1$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_3 = 0$ ($s_0 = 0$).
Dvs. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $z = 15$.

Svar i ord: Gör reningsverk på plats 2, 3 och 4.

Lösningen är tillåten i det ursprungliga bivillkoret.

2c:

Uppnystning: $s_4 = 2$, $x_4 = 1$, $s_3 = 1$, $x_3 = 1$, $s_2 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$, $x_3 = 0$ ($s_0 = 0$).
Dvs. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $z = 11$.

Svar i ord: Gör reningsverk på plats 3 och 4.

Nyttan minskar från 15 till 11.