Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta s
Lösning till tentamen
2014-01-15

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: (Detta problem är en blandning av lagerhållningsproblem och kappsäcksproblem.)

Definitioner: Tillstånd s_k är antal plogar i lager efter vecka k.
Styrning x_k är antal tillverkade plogar under vecka k.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - x_k$.
$0 \leq x_k \leq 3$ för alla k, och $0 \leq s_k \leq 4$ för alla $k < 4$.
$s_0 = 0$, $s_4 = 5$ (eller möjligtvis $s_4 = 4$ i uppgift b).
(Om $\hat{x}_k$ inte är unik väljs den högsta, för att få så sen produktion som möjligt.)

Iteration 1: ($x_1 = s_1$)

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4
0	0	-	-	-	-
1	-	3	-	-	-
2	-	-	5	-	-
3	-	-	-	8	-
$f_2(s_2)$	0	3	5	8	-
$\hat{x}_2(s_2)$	0	1	2	3	-

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4
0	0	3	5	8	-
1	-	3	6	8	11
2	-	-	6	9	11
3	-	-	-	8	11
$f_2(s_2)$	0	3	5	8	11
$\hat{x}_2(s_2)$	0	1	0	3	3

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4
0	0	3	5	8	11
1	-	4	7	9	12
2	-	-	6	9	11
3	-	-	-	8	11
$f_2(s_2)$	0	3	5	8	11
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	3	3

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	4	5
0	11	-
1	13	16
2	12	15
3	13	15
$f_3(s_3)$	11	15
$\hat{x}_3(s_3)$	0	3

Uppnystning: $s_4 = 5$, $x_4 = 3$, $s_3 = 2$, $x_3 = 0$, $s_2 = 2$, $x_2 = 0$, $s_1 = 2$, $x_1 = 2$.
Dvs. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 2$, $s_4 = 5$, $z = 15$.

Svar i ord: Gör två plogar första veckan och tre plogar fjärde veckan. Lagerhållning är två plogar fram till sista veckan. Kostnaden är 15 miljoner.

1b: Uppnystning: $s_4 = 4$, $x_4 = 0$, $s_3 = 4$, $x_3 = 3$, $s_2 = 1$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$.
Dvs. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 4$, $s_4 = 4$, $z = 11$.

Lösning i ord: Gör en plog under vecka 2 och tre under vecka 3. Lagra en efter vecka 2 och fyra efter vecka 3. Kostnaden blir 11 miljoner.

Val av alternativ:
Om man gör 5 och kunden vill ha 5 blir vinsten $25 - 15 = 10$.
Om man gör 5 och kunden vill ha 4 blir vinsten $20 - 15 + 2 = 7$.
Om man gör 4 och kunden vill ha 5 blir vinsten $20 - 11 - 1 = 8$.
Om man gör 4 och kunden vill ha 4 blir vinsten $20 - 11 = 9$.
Förväntad vinst om man gör 5: $0.8 * 10 + 0.2 * 7 = 9.4$.
Förväntad vinst om man gör 4: $0.8 * 8 + 0.2 * 9 = 8.2$.
Slutsats: Gör 5 plogar, ty det ger störst förväntad vinst.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$$\begin{aligned} g(u) = \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 10y_1 + 20y_2 + \bar{u}_2(x_1 + x_2 - 5y_1) + \bar{u}_3(x_2 + x_3 - 6y_2) \\ = \min \quad & (3 + \bar{u}_2)x_1 + (2 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3)x_2 + (4 + \bar{u}_3)x_3 + (10 - 5\bar{u}_2)y_1 + (20 - 6\bar{u}_3)y_2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Problemet kan separeras i ett i x och ett i y, båda trivialt lösbara:

$$\begin{aligned} g_1(u) = \min \quad & (3 + \bar{u}_2)x_1 + (2 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3)x_2 + (4 + \bar{u}_3)x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Lösning: Sätt det x_j som har minst målfunktionskoefficient till 5 och de andra till noll.

$$\begin{aligned} g_2(u) = \min \quad & (10 - 5\bar{u}_2)y_1 + (20 - 6\bar{u}_3)y_2 \\ \text{då} \quad & y_1 + y_2 \geq 1, \; y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Lösning: Sätt det y_j som har minst målfunktionskoefficient till 1 och det andra till noll.

Dantzig-Wolfes masterproblem:

$$\begin{aligned} \max \quad & q \\ \text{då} \quad & q \leq 3x_1^{(l)} + 2x_2^{(l)} + 4x_3^{(l)} + 10y_1^{(l)} + 20y_2^{(l)} + \\ & \qquad + u_1(x_1^{(l)} + x_2^{(l)} - 5y_1^{(l)}) + u_1(x_2^{(l)} + x_3^{(l)} - 6y_2^{(l)}) \quad \text{för alla } l \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u_1 och u_2, och ger en undre gräns, $g(\bar{u})$, samt en ny lösning, $(x^{(l)}, y^{(l)})$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $(x^{(l)}, y^{(l)})$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$ och $\sum_l \lambda_l y^{(l)}$. (Obs. detta löser LP-relaxationen av problemet.)

2b: En subgradient fås som $\xi = \begin{pmatrix} x_1^{(l)} + x_2^{(l)} - 5y_1^{(l)} \\ x_2^{(l)} + x_3^{(l)} - 6y_2^{(l)} \end{pmatrix}$, där $(x^{(l)}, y^{(l)})$ är optimallösningen till subproblemet.

Punkt $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 0$ ($g(\bar{u}) = 20$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$) ger subgradient $\xi = (0, 5)$ och snitt: $q \leq 20 + 5u_2$.
Punkt $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 10$ ($g(\bar{u}) = -25$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$) ger subgradient $\xi = (5, -6)$ och snitt: $q \leq 35 + 5u_1 - 6u_2$.
Punkt $\bar{u}_1 = 10$, $\bar{u}_2 = 10$ ($g(\bar{u}) = -15$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$) ger subgradient $\xi = (0, -6)$ och snitt: $q \leq 45 - 6u_2$.

Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq 20 + 5u_2 \\ & q \leq 35 + 5u_1 - 6u_2 \\ & q \leq 45 - 6u_2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

2c: Lös subproblemet för $u_1 = 2$ och $u_2 \approx 2.27$:

$$\begin{array}{ll} g_1(u) = \min & 5x_1 + 6.27x_2 + 6.27x_3 \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 5,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

har lösningen $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$,

$$\begin{array}{ll} g_2(u) = \min & 0y_1 + 13.63y_2 \\ \text{då} & y_1 + y_2 \geq 1,\ y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

har lösningen $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, med målfunktionsvärde $g(u) = 25$.

Vi har nu undre gräns 25 och övre gräns 31.36, vilket inte indikerar optimum.

Subgradienten blir $\xi = (0, 0)$, så detta indikerar att vi har maximum av den duala funktionen.

2d: Snittet blir $q \leq 25$.

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq 20 + 5u_2 \\ & q \leq 35 + 5u_1 - 6u_2 \\ & q \leq 45 - 6u_2 \\ & q \leq 25 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Sätt in punkten $u_1 = 0$ och $u_2 = 5/3 \approx 1.667$ i masterproblemet. Den ger $q = 25$, så den övre gränsen är 25. Vi vet sedan tidigare att den bästa undre gränsen är 25, så vi har optimum. (Om man löser subproblemet i denna punkt, fås samma lösning som i uppgift c.)

Uppgift 3

3a: Subproblemet (för fixerade y):

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = \min & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 10\bar{y}_1 + 20\bar{y}_2 & \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 & (1) \\ & -x_1 - x_2 \geq -5\bar{y}_1 & (2) \\ & -x_2 - x_3 \geq -6\bar{y}_2 & (3) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rl} h(\bar{y}) = \max & 5u_1 - 5\bar{y}_1 u_2 - 6\bar{y}_2 u_3 + 10\bar{y}_1 + 20\bar{y}_2 \\ \text{då} & u_1 - u_2 \leq 3 \\ & u_1 - u_2 - u_3 \leq 2 \\ & u_1 - u_3 \leq 4 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q + 10y_1 + 20y_2 \\ \text{då} & q \geq 5u_1^{(l)} - u_2^{(l)} y_1 - 6u_3^{(l)} y_2 \ \forall l \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

eller

$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq 5u_1^{(l)} + (10 - u_2^{(l)}) y_1 + (20 - 6u_3^{(l)}) y_2 \ \forall l \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

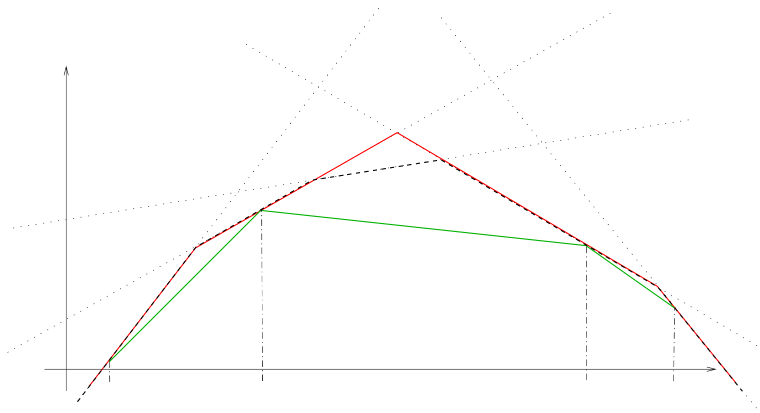
3b: Punkt $\bar{y}_1 = 1$, $\bar{y}_2 = 1$ ($h(\bar{y}) = 40$, $u_1 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$) ger snitt $q \geq 20 - 10y_1$ eller $q \geq 20 + 20y_2$.
Punkt $\bar{y}_1 = 1$, $\bar{y}_2 = 0$ ($h(\bar{y}) = 25$, $u_1 = 3$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$) ger snitt $q \geq 15 - 6y_2$ eller $q \geq 15 + 10y_1 + 14y_2$.
Punkt $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = 1$ ($h(\bar{y}) = 40$, $u_1 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$) ger snitt $q \geq 20 - 10y_1$ eller $q \geq 20 + 20y_2$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q + 10y_1 + 20y_2 \\ \text{då} & q \geq 20 - 10y_1 \\ & q \geq 15 - 6y_2 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array} \qquad \text{eller} \qquad \begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq 20 + 20y_2 \\ & q \geq 15 + 10y_1 + 14y_2 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ med $h(y) = 25$, och sätter vi in den i masterproblemet, får vi $q = 25$. Nu har vi både undre och övre gräns lika med 25, så lösningen är optimal.

Uppgift 4



I denna figur figur är alla existerande snitt prickade, och den korrekta duala funktionen (min av snitten) streckad. De punkter i u där subproblemet har lösts är markerade med vertikala prickstreckade linjer. Den röda kurvan är vad som kan fås i uppgift 4a, och den gröna vad som kan fås i uppgift 4b.

4a: Man kan få den röda funktionen i figuren. Där ser man att man kan sakna vissa linjära stycken, och där blir beskrivningen högre än den riktiga funktionen, så man får alltid en överskattning av den duala funktionen. I bilden saknas bara ett snitt.

4b: Man kan få den gröna funktionen i figuren. Där ser man att beskrivningen ger en underskattning av den riktiga duala funktionen. Det krävs många fler evalueringar för att få en bra beskrivning.

4c: Ja, det ger fler av de "lutningar" (dvs. subgradienter) som gäller i punkten. (Detta kan bara hända i brytpunkter.)

4d: $g(u)$ är konkav, kontinuerlig, generellt sett inte differentierbar, men differentierbar för konvexa problem med strikt konvex målfunktion. $g(u) \leq v^*$ för alla $u \geq 0$.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: Inför två olika sorters transportvariabler för bågarna till och från mellanlagren (parallellt i alla nodjämviktsvillkor), samt binära variabler som är 1 om vi använder nya bilen och 0 om vi använder gamla bilen. Sätt inköpskostnaderna som fasta kostnader på dessa binära variabler. (Jag accepterar olika bilar på olika sträckor.)

5b: Inför en binär variabel som är 1 om grossister ska användas. Ersätt alla binära variabler för grossister med denna enda, och lägg alla fasta kostnader för grossister på denna variabel.

Uppgift 6 (kortfattat)

Kostnad för att ändra framdrivningssätt: Med nuvarande tillståndsdefinition är detta ej möjligt, då optimeringen i ett steg inte får bero på hur föregående tillstånd uppnåddes, utan bara på värdet $f_{k-1}(s_{k-1})$ (vilket ju inte har information om föregående framdrivningssätt). (Man skulle dock kunna införa ytterligare en tillståndsvariabel, som anger vilket framdrivningssätt som användes föregående steg. Alla kombinationer av tillståndsvariablerna måste undersökas, så detta blir knappast effektivt.)

Osäker sänkning av batterinivån: Man följer inte säkert den optimala planen, utan kan hamna på en annan batterinivå (tillstånd) än förväntat. Man skulle då behöva göra om optimeringen från den startlösningen, vilket kanske är möjligt. Ännu bättre vore att använda bakåtrekursion, för då har man redan optimal styrning från alla nivåer. Då behöver man bara göra om uppnystningen, vilket går snabbt. (Om man har sannolikheter för möjligheterna, vore det allra bästa att optimera förväntad effekt, ungefär som i uppgift 1b.)

Finna väg samtidigt: Man får införa en ny tillståndsvariabel för vilken nod man ska till. Tillstånden kommer då att vara definierade av både batterinivå och nod i grafen, och man måste undersöka alla kombinationer av dessa. (Detta blir jobbigt, så det är tveksamt om det är en bra metod.)

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: Någon föreslår vilka bågar som ska byggas ut. Vi finner billigaste sätt att skicka med denna utbyggnad (lösa subproblemet). Vi skapar ett "Benderssnitt" som tar med informationen från denna lösning till masterproblemet, speciellt hur svårt/dyrt det är att uppfylla olika bivillkor. Vi löser masterproblemet för att få ett bättre förslag på utbyggnad. Masterproblemet tar hänsyn till alla *kända* lösningar, men ger en lösning som kan verka för bra, eftersom vi inte känner till *alla* möjliga lösningar. Lösningen från subproblemet är lite för dålig, eftersom utbyggnaden kanske inte är den bästa. När kostnaden från masterproblemet är densamma som från subproblemet, har vi den bästa utbyggnaden, och vet precis vad den kostar.

7b: Om $\hat{c}_{ij} < 0$, så skulle kostnaden sänkas om vi fick skicka mer än vi gör i båge (i, j). Det betyder att vi gärna vill höja den övre gränsen på den bågen. Detta ger ett β_{ij} som är positivt, så då kan q få ett lägre värde (i detta snitt) om motsvarande y_{ij} sätts till 1 istället för 0. Lägre q ger ju lägre kostnad, dvs. en bättre lösning. (Poängen med masterproblemet är att man inte bara har med senaste snittet, utan alla tidigare, vilket ger en mer komplett bild av situationen.)

Uppgift 8 (kortfattat)

Flyttning av cykler från ett fordon till ett annat, på lite olika sätt.

Markera alla passerade bågar som gjorda, och förändra ordningen för fordonen.

Flytta slumpmässigt bågar mellan fordon, på olika sätt.

(Därtill kommer valet av startlösning.)

Se informationen om Snowplan för detaljer.

Vad lägga till? Plats för kreativitet.