Tekniska Högskolan i Linköping — Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen — Lösning till tentamen
Optimeringslära — 2014-04-23
Kaj Holmberg

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Definitioner: Tillstånd s_k är antal ölfat i lager efter månad k.
Styrning x_k är antal ölfat som bryggs under månad k.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - x_k + d_k$, där d_k är försäljningen månad k.
$0 \leq x_k \leq 2$ för alla k, och $x_4 \leq 1$.
$s_0 = 2$, $s_5 = 0$.
Eftersom försäljningen sker i början av månaden och bryggningen inte är färdig förrän i slutet, måste vi se till att $s_{k-1} - d_k \geq 0$ för att inte få negativt lager under månaden. Mha. överföringsfunktionen kan detta skrivas som $x_k \leq s_k$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4
0	-	-	0	-	-
1	-	-	-	4	-
2	-	-	-	-	7
$f_1(s_1)$	-	-	0	4	7
$\hat{x}_1(s_1)$	-	-	0	1	2

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4
0	0	4	7	-	-
1	-	4	8	12	-
2	-	-	6	11	15
$f_2(s_2)$	0	4	6	11	15
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	2	2	2

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5
0	4	6	11	16	-	-
1	-	9	11	17	23	-
2	-	-	11	14	20	26
$f_3(s_3)$	4	6	11	14	20	26
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	2	2	2

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6
0	4	6	11	15	22	29	-
1	-	10	12	18	23	31	39
$f_4(s_4)$	4	6	11	15	22	29	39
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0	1

Iteration 5: $x_5 = 0$, $s_5 = 0$, $f_5(0) = 15$.

Uppnystning: $s_5 = 0$, $x_5 = 0$, $s_4 = 3$, $x_4 = 0$, $s_3 = 3$, $x_3 = 2$, $s_2 = 2$, $x_2 = 2$, $s_1 = 2$, $x_1 = 0$. $z = 15$.

Svar i ord: Brygg två fat öl i maj och juni. Lagerhållning är två fat efter april och maj, och tre fat efter juni och juli. Kostnaden är 15.

1b: Ingen skillnad.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$$\begin{array}{ll} g(\bar{u}) = \min & -x_1 - 2x_2 + \bar{u}(x_1 + x_2 - 10) = (\bar{u}-1)x_1 + (\bar{u}-2)x_2 - 10\bar{u} \\ \text{då} & 0 \le x_1 \le 8, 0 \le x_2 \le 5 \end{array}$$

Lösning: Sätt $x_1 = 8$ om $(\bar{u} - 1) < 0$, dvs. $\bar{u} < 1$, och 0 annars. Sätt $x_2 = 8$ om $(\bar{u} - 2) < 0$, dvs. $\bar{u} < 2$, och 0 annars.

Dantzig-Wolfes masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \le -x_1^{(l)} - 2x_2^{(l)} + u(x_1^{(l)} + x_2^{(l)} - 10) \;\; \text{för alla } l \\ & u \ge 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $g(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

2b: En subgradient fås som $\xi = x_1^{(l)} + x_2^{(l)} - 10$, där $x^{(l)}$ är optimallösningen till subproblemet.

Punkt $\bar{u} = 0$ ($x_1 = 8$, $x_2 = 5$) ger subgradient $\xi = 3$ och snitt: $q \le -18 + 3u$.
Punkt $\bar{u} = 10$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) ger subgradient $\xi = -10$ och snitt: $q \le -10u$.
Punkt $\bar{u} = 1.38$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 5$) ger subgradient $\xi = -5$ och snitt: $q \le -10 - 5u$.

Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \le -18 + 3u \\ & q \le -10u \\ & q \le -10 - 5u \\ & u \ge 0 \end{array}$$

2c: Lös subproblemet för $u = 1$: $g(1) = \min -x_2 - 10$ då $0 \le x_1 \le 8, 0 \le x_2 \le 5$ som har lösningen x_1 valfri mellan 0 och 8, $x_2 = 5$, med målfunktionsvärde $g(u) = -15$.

Vi har nu undre gräns -15 och övre gräns -15, vilket indikerar optimum.

2d: Om man väljer $x_1 = 5$ så fås subgradient $\xi = 0$, vilket indikerar att vi har maximum av den duala funktionen. Man kan även notera att lösningen uppfyller det relaxerade bivilkoret med likhet, samt ger värdet -15 i den ursprungliga målfunktionen, så lösningen är optimal.

Uppgift 3

3a: Subproblemet (för fixerade y):

$$\begin{aligned} h(\bar{y}) = \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2\bar{y} \\ \text{då} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 3 - \bar{y} \\ & 2x_1 - 2x_2 \geq 4 - 3\bar{y} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{aligned} h(\bar{y}) = \max \quad & (3 - \bar{y})u_1 + (4 - 3\bar{y})u_2 + 2\bar{y} \\ \text{då} \quad & u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ & 2u_1 - 2u_2 \leq 3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{aligned} \min \quad & q \\ \text{då} \quad & q \geq (3 - y)u_1^{(l)} + (4 - 3y)u_2^{(l)} + 2y \ \text{ för alla } l \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \min \quad & q \\ \text{då} \quad & q \geq (2 - u_1^{(l)} - 3u_2^{(l)})y + 3u_1^{(l)} + 4u_2^{(l)} \ \text{ för alla } l \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

(Alternativt kan termen $2y$ tas med i målfunktionen istället för i snitten.)

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

3b: Punkt $\bar{y} = 0$ ($u_1 = 5/3 = 1.667$, $u_2 = 1/6 = 0.167$) ger snitt $q \geq 17/3 - 1/6y_1$ eller avrundat $q \geq 5.667 - 0.1667y$.
Punkt $\bar{y} = 3$ ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$) ger snitt $q \geq 2y$.
Punkt $\bar{y} = 2.61$ ($u_1 = 1.5$, $u_2 = 0$) ger snitt $q \geq 4.5 + 0.5y$.
Punkt $\bar{y} = 1.75$ ($u_1 = 1.5$, $u_2 = 0$) ger snitt $q \geq 4.5 + 0.5y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{aligned} \min \quad & q \\ \text{då} \quad & q \geq 5.667 - 0.1667y \\ & q \geq 2y \\ & q \geq 4.5 + 0.5y \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \min \quad & q + 2y \\ \text{då} \quad & q \geq 5.667 - 2.1667y \\ & q \geq 0 \\ & q \geq 4.5 - 1.5y \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Den bästa lösningen är $y = 1.75$ med $h(y) = 5.375$, och sätter vi in den i masterproblemet, får vi $q = 5.375$. Nu har vi både undre och övre gräns lika med 5.375 så lösningen är optimal.

Uppgift 4 (kortfattat)

4a: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många. Den primala lösningen fås som en konvexkombination av subproblemlösningarna. Antalet iterationer kan inte blir mer än antalet extrempunkter till det tillåtna området i subproblemet.

4b: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta duala tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många. Den primala lösningen fås i subproblemet. Antalet iterationer kan inte blir mer än antalet extrempunkter till det duala tillåtna området i subproblemet.

4c: Den primala lösningen kan inte förväntas. (F.ö. se kurslitteraturen.)

4d: Metoden kan fastna om man gör linjesökning, eftersom subgradienterna inte alltid ger ökanderiktningar. (F.ö. se kurslitteraturen.)

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: (Se projektinformationen.)

5b: Olika sorters förpackningar. Olika transportsätt (som ger olika kostnadsstrukturer). Miljöavgifter på materialinköp.

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: Antalet segment längs vägen påverkar antalet iterationer. Antalet framdrivningssätt påverkar tabellen storlek. Antalet diskretiserade laddningsnivåer påverkar tabellen storlek. Antalet olika vägtyper spelar ingen roll.

6b: Kostnader för eller begränsningar i byte mellan framdrivningssätt. Kopplingar mellan vägavsnitt. Slumpmässiga variationer i urladdning, t.ex. beroende på väder elelr andra yttre faktorer.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: (Se projektinformationen.) Efterfrågan kanske inte borde vara helt given. Kostnaderna för utbyggnad kanske varierar, och kan bero på varandra. Utbyggnaden kanske inte kan ske momentant.

7b: Om antalet länkar med möjlig utbyggnad ökar, ökar masterproblemets storlek, och antalet iterationer kommer att öka (mycket). Om nätverkets storlek ökar, blir subproblemet större, vilket nog inte påverkar metoden lika mycket.

Uppgift 8 (kortfattat)

8a: Om nätverket blir större, ökar tiden för lantbrevbärarkoden. Om antalet fordon ökar, blir det svårare att manuellt göra en bra uppdelning.

7b: (Se kurslitteraturen.)