Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2014-08-26

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Definitioner: Tillstånd s_k antal kg i Viktor t.om. sak k.
Styrning $x_k = 1$ om sak k tas med.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - v_k x_k$, där v_k är vikten av sak k.
$x_k \in \{0,1\}$ för alla k, och $0 \leq s_k \leq 100$ för all k.
$s_0 \geq 0$, $s_8 = 100$.
F.ö. se boken.

1b: Antal saker ger antal iterationer, här 8. Den maximala vikten ger storleken på varje tabell, här 100.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	8	8	8	8
$f_1(s_1)$	0	0	0	8	8	8	8
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	8	8	8	8
1	-	-	5	5	5	13	13
$f_2(s_2)$	0	0	5	8	8	13	13
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	0	0	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	5	8	8	13	13
1	-	-	3	3	8	11	11
$f_3(s_3)$	0	0	5	8	8	13	13
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	0	0	

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	5	8	8	13	13
1	-	9	9	14	17	17	22
$f_4(s_4)$	0	9	9	14	17	17	22
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	1	1	1	1	1

Uppnystning: $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 5$, $x_3 = 0$, $s_2 = 5$, $x_2 = 1$, $s_1 = 3$, $x_1 = 1$. $z = 22$.

Är lösningen tillåten? Ja, ty total vikt: $32 + 15 + 10 = 57 \leq 61$.

Svar i ord: Ta med sak 1, 2 och 4, dvs. bokhyllan, musikanläggningen och datorn, men inte sängen. Värde 22.

1d: Uppnystning: $s_4 = 5$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 0$, $s_2 = 4$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $x_1 = 1$. $z = 17$.

Svar i ord: Ta med sak 1 och 4, dvs. bokhyllan och datorn. Värde 17.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$g(\bar{u}) = \min -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 + \bar{u}(32x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 10x_4 - 61) = (32\bar{u} - 8)x_1 + (15\bar{u} - 5)x_2 + (15\bar{u} - 3)x_3 + (10\bar{u} - 9)x_4 - 61\bar{u} \quad$ då $0 \leq x_j \leq 1 \; \forall j$

Lösning: Sätt $x_1 = 1$ om $(32\bar{u} - 8) < 0$, dvs. $\bar{u} < 0.25$, och 0 annars. Sätt $x_2 = 1$ om $(15\bar{u} - 5) < 0$, dvs. $\bar{u} < 0.33$, och 0 annars. Sätt $x_3 = 1$ om $(15\bar{u} - 3) < 0$, dvs. $\bar{u} < 0.2$, och 0 annars. Sätt $x_3 = 1$ om $(10\bar{u} - 9) < 0$, dvs. $\bar{u} < 0.9$, och 0 annars.

$\bar{u} = 0$ ger $g(0) = \min -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4$ då $0 \leq x_j \leq 1 \; \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $g(0) = -25$. Subgradient $\xi = 11$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 1$ ger $g(1) = \min 24x_1 + 10x_2 + 12x_3 + x_4 - 61$ då $0 \leq x_j \leq 1 \; \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, och $g(0) = -61$. Subgradient $\xi = -61$. Lösningen tillåten. Övre gräns 0.

$\bar{u} = 0.5$ ger $g(0.5) = \min 8x_1 + 2.5x_2 + 4.5x_3 - 4x_4 - 30.5$ då $0 \leq x_j \leq 1 \; \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, och $g(0) = -34.5$. Subgradient $\xi = -51$. Lösningen tillåten. Övre gräns -9.

Bästa gränser: $-25 \leq v^* \leq -9$.

2b: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes i uppgift a. Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -8x_1^{(l)} - 5x_2^{(l)} - 3x_3^{(l)} - 9x_4^{(l)} + u(32x_1^{(l)} + 15x_2^{(l)} + 15x_3^{(l)} + 10x_4^{(l)} - 61) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $g(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

2c: Punkt (0,0,0,0) ger snitt: $q \leq -61u$.
Punkt (1,1,1,1) ger snitt: $q \leq -25 + 11u$.
Punkt (1,1,0,1) ger snitt: $q \leq -22 - 4u$.
Punkt (1,0,0,1) ger snitt: $q \leq -17 - 19u$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -61u \\ & q \leq -25 + 11u \\ & q \leq -22 - 4u \\ & q \leq -17 - 19u \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Maximum kommer att fås i skärningen mellan de snitt som har subgradienter (lutningar) närmast noll, en positiv och en negativ. Här blir det andra och tredje snitten,

$-25 + 11u = -22 - 4u$, vilket ger $u = 0.2$ och $q = -22.8$.

$\bar{u} = 0.2$ ger $g(0.2) = \min -1.6x_1 - 2x_2 - 7x_4 - 12.2$ då $0 \le x_j \le 1\ \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ eller 1, $x_4 = 1$, och $g(0) = -22.8$.

Vi har nu övre gränsen lika med undre gränsen, vilket indikerar optimum.

Uppgift 3

3a: Problemet vi vill lösa är

$$
\begin{array}{rl}
\min & -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 + 1.5y \\
\text{då} & 32x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 10x_4 - 10y \le 61 \quad (1) \\
& 0 \le x_j \le 1\ \forall j \\
& y \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Subproblemet (för fixerade y):

$$
\begin{array}{rl}
h(\bar{y}) = \min & -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 + 1.5\bar{y} \\
\text{då} & 32x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 10x_4 \le 61 + 10\bar{y} \quad (1) \\
& 0 \le x_j \le 1\ \forall j
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{rl}
h(\bar{y}) = \max & (-61 - 10\bar{y})u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 + 1.5\bar{y} \\
\text{då} & -32u_1 - u_2 \le -8 \\
& -15u_1 - u_3 \le -5 \\
& -15u_1 - u_4 \le -3 \\
& -10u_1 - u_5 \le -9 \\
& u_i \ge 0\ \forall i
\end{array}
$$

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{rl}
\min & q \\
\text{då} & q \ge (-61 - 10y)u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} + 1.5y = (1.5 - 10u_1^{(l)})y + C \quad \text{för alla } l \\
& y \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

där $C = -61u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)}$.

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

3b: Subproblemet kan lösas med metoden på sida 139 i boken. Här noterar vi bara att samtliga x-variabler blir större än noll i lösningen (både för $y = 0$ och $y = 1$). Komplementaritet ger då att $u_2 = 8 - 32u_1$, $u_3 = 5 - 15u_1$, $u_4 = 3 - 15u_1$, $u_5 = 9 - 10u_1$, vilket med $u_1 = 0.2$ ger $u_2 = 1.6$, $u_3 = 2$, $u_4 = 0$, $u_5 = 7$, vilket ger $C = -12.2 - 1.6 - 2 - 7 = -22.8$, så Benderssnittet blir $q \ge -22.8 + (1.5 - 2)y$, dvs. $q \ge -22.8 - 0.5y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq -22.8 - 0.5y \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 1$ med $h(y) = -23.3$, jämfört med $y = 0$ som ger $h(y) = -22.8$.

Kontroll i subproblemet ger lösningen $h(1) = -23.3$, för $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 14/15$ och $x_4 = 1$. Nu är undre och övre gräns lika, så lösningen är optimal.

Uppgift 4 (kortfattat)

4a: Subproblemet måste vara ett LP-problem, eftersom det baseras på LP-dualitet.

4b: Den primala lösningen fås som en konvexkombination av subproblemlösningar.

4c: Den primala lösningen fås ej säkert p.g.a. bristen på styrbarhet.

4d: Då måste man införa tio olika tillståndsvariabler, och i varje steg undersöka samtliga kombinationer av dessa tio variabler. Detta gör dynamisk programmering till en dålig metod.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: (Se projektinformationen.)

5b: En sorts förpackning. För enkel kostnadsstruktur, både för fasta kostnader och materialinköp.

Uppgift 6 (kortfattat)

Vald väg kan bestämmas av GPS, eller matas in. Vägen måste delas upp i delar, vilket borde göras centralt och informationen ges ut (via Internet). Alternativt får uppdelningen göras individuellt av programvara i bilen. Kostnads- och urladdningskoefficienter måste tas fram. Lösningen av problemet kräver viss datorkapacitet i bilen. Därefter ska lösningen användas, därför behövs koppling mellan datorn och motorinställningarna. En enklare variant är att föraren informeras om bästa inställning, men får göra inställningen för hand.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: (Se projektinformationen.)

7b: Installation/uppdatering av större telekomfibrer. Nybyggnation/utbyggnad av gatunät/cykelbanor. Nybyggnation/utbyggnad av pipelines för olja/gas.

Uppgift 8 (kortfattat)

8a: Finn cykler för ett antal fordon, så att alla bågar täcks (minst en gång), så att kostnaden minimeras. Finn det antal fordon som minimerar kostnaden för detta.

8b: Utdelning av post. Insamling av sopor.