Tekniska Högskolan i Linköping	Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen	Lösning till tentamen
Optimeringslära	2015-01-14
Kaj Holmberg	

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Givna data: c_j: kostnad för att köpa företag j.
v_j: vinst vid försäljning av företag j.
Variabeldefinition: $x_j = 1$ om vi köper företag j, 0 om inte.

$$\begin{array}{rll} \max & 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 & \\ \text{då} & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 5 & (1) \\ & x_j \in \{0,1\} \ \forall j & \end{array}$$

1b: Definitioner: Tillstånd s_k antal miljarder som använts till köp av företag 1 - k.
Styrning $x_k = 1$ om företag k köpes.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - c_k x_k$.
$x_k \in \{0,1\}$ för alla k, och $0 \leq s_k \leq 5$ för all k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 5$. F.ö. se boken.
Med tanke på uppgift c tas även en kolumn för $S_k = 6$ med.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	4	4	4	4
$f_1(s_1)$	0	0	0	4	4	4	4
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	4	4	4	4
1	-	-	-	-	6	6	6
$f_2(s_2)$	0	0	0	4	6	6	6
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	4	6	6	6
1	-	-	3	3	3	7	7
$f_3(s_3)$	0	0	3	4	6	7	7
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	0	0	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	3	4	6	7	7
1	-	-	-	-	5	5	5
$f_4(s_4)$	0	0	3	4	6	7	7
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0	0

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	3	4	6	7	7
1	-	3	3	6	7	9	10
$f_3(s_3)$	0	3	3	6	7	9	10
$\hat{x}_3(s_3)$	0	1	0	1	1	1	1

Uppnystning: $s_5 = 5$, $x_5 = 1$, $s_4 = 4$, $x_4 = 0$, $s_3 = 4$, $x_3 = 0$, $s_2 = 4$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$. $z = 9$. Svar i ord: Köp företag 2 och 5, dvs. Wearnot och Snowmovers, vilket ger vinst 9 miljarder.

1c: För $s_5 = 6$ fås målfunktionsvärde 10, dvs. förtjänsten av lånet blir en miljard, vilket är mindre än kostnaden. Ta ej lånet. (Uppnystning behöver då ej göras.)

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$g(\bar{u}) = \min -6x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 4x_4 + \bar{u}(10x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 20) =$
$(10\bar{u} - 6)x_1 + (8\bar{u} - 4)x_2 + (8\bar{u} - 6)x_3 + (6\bar{u} - 4)x_4 - 20\bar{u} \quad$ då $x_j \in \{0, 1\}\ \forall j$

$\bar{u} = 0$ ger $g(0) = \min -6x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4$ då $x_j \in \{0, 1\}\ \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $g(0) = -20$. $\underline{v} = -20$.
Subgradient $\xi = 12$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 0.7$ ger $g(0.7) = \min x_1 + 1.6x_2 - 0.4x_3 + 0.2x_4 - 14$ då $x_j \in \{0, 1\}\ \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, och $g(0.7) = -14.4$. $\underline{v} = -14.4$.
Subgradient $\xi = -12$. Lösningen tillåten. $\bar{v} = -6$.

$\bar{u} = 0.65$ ger $g(0.65) = \min 0.5x_1 + 1.2x_2 - 0.8x_3 - 0.1x_4 - 13$ då $x_j \in \{0, 1\}\ \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $g(0.65) = -13.9$. $\underline{v} = -13.9$.
Subgradient $\xi = -6$. Lösningen tillåten. $\bar{v} = -10$.

Bästa gränser: $-13.9 \leq v^* \leq -10$.

2b: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes i uppgift a. Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -6x_1^{(l)} - 4x_2^{(l)} - 6x_3^{(l)} - 4x_4^{(l)} + u(10x_1^{(l)} + 8x_2^{(l)} + 8x_3^{(l)} + 6x_4^{(l)} - 20) \ \text{ för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $g(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

2c: Punkt (0,0,0,0) ger snitt: $q \leq -20u$.
Punkt (1,1,1,1) ger snitt: $q \leq -20 + 12u$.
Punkt (0,0,1,0) ger snitt: $q \leq -6 - 12u$.
Punkt (0,0,1,1) ger snitt: $q \leq -10 - 6u$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -20u \\ & q \leq -20 + 12u \\ & q \leq -6 - 12u \\ & q \leq -10 - 6u \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Maximum fås i skärningen mellan andra och fjärde snitten, $-20 + 12u = -10 - 6u$, vilket ger $u = 5/9 = 0.5556$ och $q = -40/3 = -13.333$.
Vi har nu $-13.9 \leq v^* \leq -13.333$.

2d: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$g(\bar{u}) = \min -6x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 4x_4 + \bar{u}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2) =$
$(\bar{u} - 6)x_1 + (\bar{u} - 4)x_2 + (\bar{u} - 6)x_3 + (\bar{u} - 4)x_4 - 2\bar{u}$ då $x_j \in \{0, 1\}\ \forall j$

$\bar{u} = 5$ ger $g(0) = \min -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 10$ då $x_j \in \{0, 1\}\ \forall j$
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, och $g(0) = -12$. $\underline{v} = -12$. Subgradient $\xi = -2$. Lösningen tillåten. $\bar{v} = -12$, lika med undre gräns. Optimum. Ja, problemet blev enklare att lösa.

2e: Nej. Det skulle kräva $(10\bar{u} - 6) \leq 0$ $(8\bar{u} - 4) \geq 0$, $(8\bar{u} - 6) \leq 0$ och $(6\bar{u} - 4) \geq 0$, dvs. $\bar{u} \leq 0.6$, $\bar{u} \geq 0.5$, $\bar{u} \leq 0.75$ och $\bar{u} \geq 0.6667$, och inget $\bar{u}$ kan uppfylla detta.

Uppgift 3

3a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = \min & -5x_1 - 3x_2 + 4\bar{y} & \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 + 2\bar{y} & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} h(\bar{y}) = \max & -(5 + 2\bar{y})u_1 + 4\bar{y} \\ \text{då} & -2u_1 \leq -5 \\ & -2u_1 \leq -3 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -(5 + 2y)u_1^{(l)} + 4y = (4 - 2u_1^{(l)})y + C \quad \text{för alla } l \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

där $C = -5u_1^{(l)}$.

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

3b: För $\bar{y} = 0$:

$$\begin{array}{rll} h(0) = \min & -5x_1 - 3x_2 & \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

eller

$$\begin{array}{rl} h(0) = \max & -5u_1 \\ \text{då} & -2u_1 \leq -5 \\ & -2u_1 \leq -3 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

Lösningen blir $u_1 = 2.5$ (och $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$) med $h(0) = -12.5$. Benderssnittet blir $q \geq -12.5 - y$.

Benders masterproblem:
$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -12.5 - y \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 1$ med $h(y) = -13.5$ (jämfört med $y = 0$ som skulle ge $h(y) = -12.5$).

Vi har nu $-13.5 \leq v^* \leq -12.5$.

För $\bar{y} = 1$:

$$h(0) = \min \quad -5x_1 - 3x_2 + 4 \quad \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \quad (1), \quad x_1, x_2 \geq 0$$

eller

$$h(0) = \max \quad -7u_1 + 4 \quad \text{då} \quad -2u_1 \leq -5, \quad -2u_1 \leq -3, \quad u_1 \geq 0$$

Lösningen blir $u_1 = 2.5$ (och $x_1 = 3.5$, $x_2 = 0$) med $h(1) = -13.5$. Övre gränsen är lika med undre. Optimum.

3c: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rl} h(\bar{y}) = \min & -5x_1 - 3x_2 + 4\bar{y} \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 + 2\bar{y} \quad (1) \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} h(\bar{y}) = \max & -(5 + 2\bar{y})u_1 - 2u_2 + 4\bar{y} \\ \text{då} & -2u_1 - u_2 \leq -5 \\ & -2u_1 \leq -3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq -(5+2y)u_1^{(l)} - u_2^{(l)} + 4y = (4 - 2u_1^{(l)})y + C \quad \text{för alla } l \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

där $C = -5u_1^{(l)} - u_2^{(l)}$.

För $\bar{y} = 0$:

$$\begin{array}{rl} h(0) = \min & -5x_1 - 3x_2 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (1) \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{eller} \qquad \begin{array}{rl} h(0) = \max & -5u_1 - 2u_2 \\ \text{då} & -2u_1 - u_2 \leq -5 \\ & -2u_1 \leq -3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Lösningen blir $u_1 = 1.5$, $u_2 = 2$ (och $x_1 = 2$, $x_2 = 0.5$) med $h(0) = -11.5$. Benders-snittet blir $q \geq -11.5 + y$.

Benders masterproblem:
$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq -11.5 + y \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 0$ med $h(y) = -11.5$. Övre gränsen är lika med undre. Optimum.

Uppgift 4 (kortfattat)

4a: Lagrangerelaxationen (Dantzig-Wolfes subproblem) behöver u_1 och ger undre gräns samt x, y. Benders subproblem tar detta y och ger övre gräns, samt (u_1, u_2), varav u_1 används i Lagrangerelaxationen.

4b: Benders subproblem: Fixera y, dvs. vilka fabriker som ska byggas. Då återstår ett linjärt minskostnadsflödesproblem.
Lagrangerelaxation: Relaxera (t.ex.) (1). Då faller problemet isär i ett i x och ett i y, båda triviala att lösa.
Detaljer kan fås i artikeln T.J. Van Roy: A Cross Decomposition Algorithm for Capacitated Facility Location, i *Operations Research*, vol 34, sidorna 145–163, 1986.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: Mellan butik och grossister eller lager har vi tre variabelgrupper med 1 milj variabler i varje. Det finns minst en grupp nodjämviktsvillkor vid butiker, vilket blir 10.000 st. (Andra skillnader är oviktiga.) Som tur är blir inte heltalsvariabler så många. Det är tveksamt om GLPK kan lösa LP-problemet snabbt.

Eftersom butikerna är så många, är det dem man måste påverka. I praktiken kommer varje butik att använda någon av de närmaste lagren och/eller grossisterna, så många variabler (långa bågar) kan tas bort.

5b: Man kan köra Bendersdekomposition på variablerna för de fasta kostnaderna. Två svårigheter återstår dock: Subproblemet är inte ett rent minkostnadsflödesproblem, eftersom det finns omvandling av flöde (så vi kan inte använda Vineopt), och subproblemet är mycket stort (3 milj variabler).

En annan ide är att Lagrangerelaxera alla bivillkor som binder ihop butikerna, och därvid få ett subproblem som är separabelt. Dock måste många bivillkor då relaxeras. (Man kan inte trolla, ett svårt problem är svårt.)

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: Man kan behandla besinen på samma sätt som batteriet (i princip). Det behövs ett tillstånd till, nämligen bensinnivån, samt data för vad den kostar och hur mycket som går åt. Det jobbiga är att man måste undersöka alla kombinationer av de två tillstånden, batteri- och bensinnivå. (Påfyllnad av bensin kan också vara intressant, se uppgift b.)

6b: Inför laddningsstationerna som fiktiva (mycket speciella) vägavsnitt, där det finns två alternativ:
1. Kör förbi (ingen kostnad, ingen ändring av batterinivån).
2. Snabbladda, vilket ger en ökning av batterinivån och en kostnad som motsvarar tiden 20 min. (Vi behöver alltså hitta en omvandligsfaktor mellan tid och pengar/sträcka.)

Ett annat (sämre) alternativ är att i förväg (på något sätt) bestämma var vi ska ladda, och finna bästa körsättet mellan dessa punkter, vilket blir separata problem.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: Likheter: Vi har ett flöde i ett nätverk. Vi kan uppskatta "efterfrågan", antingen vid rusningstrafik eller i medel. Man kan bygga ut kapaciteter på länkar. Fasta kostnader uppträder, oavsett hur mycket länkarna sedan används.

Skillnader: Bilflödet är inte precis ett minkostnadsflöde (men vi kan nog använda den approximationen). Vägar slits, så ombyggnad kan behövas även om vi bara vill bevara kapaciteten, inte utöka den. Därför är det nog vanligare med vägarbeten än elledningsarbeten. Flödet är egentligen olika vid olika tider, och består egentligen av olika sorters trafikanter. Dessutom fungerar kapaciteterna inte på samma sätt, i trafiken kan stockningar uppstå, vilket betyder att flödet kommer fram, men senare. Till sist är grafen betydligt större. (Linköping har ca 13000 noder.)

Metoden borde dock fungera ganska bra. (Se dock uppgift b.)

7b: Man måste införa tid i modellen (dvs. ett index till), vilket får modellen att växa mycket. Man ska då bestämma när varje utbyggnad ska ske, och kan ha bivillkor på hur många arbeten som kan vara igång samtidigt. Födet måste komma fram varje tidsperiod. Subproblemet kan lösas separat för tidsperioderna, men i masterproblemet måste de hänga ihop. Masterproblemet blir därför betydligt svårare.

Uppgift 8 (kortfattat)

8a: Stora principiella likheter. Skillnader: Att åka en gång per gata är ingen förenkling. Man har inte samma krav på att bli färdig tidigt. (Tiden får lägre vikt än kostnaden.) Soptunnor finns kanske inte på alla gator, så vi får ett lantbrevbärarproblem även för ett fordon. Tiden beror mer på hur många soptunnor som finns på en gata, och det går betydligt fortare att köra en gata en andra gång (eftersom man då inte behöver tömma några soptunnor). Det tar ofta flera dagar att fixa en hel stad, så uppdelningen blir inte bara per fordon utan också per dag. En sopbil kan bli full, så man begränsar nog turernas längd så att detta inte sker. (Se dock uppgift b.)

Snowplan/Vineopt kan i princip användas, även om flera förenklingar får göras.

8b: Man måste hålla reda på återstående mängd sand. När man har kört en viss sträcka (dvs. gjort av med en viss mängd sand), måste man åka till en depå och fylla på, innan man fortsätter. Därför är det smartare att bara planera rundturer som börjar och slutar i depån, och som är så korta att en last sand räcker. En del ändringar skulle då behöva göras i Snowplan, men metoden går i princip att använda.