Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2015-04-08

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Definitioner: Tillstånd: s_k: vattenvolym efter månad k.
Styrning: $x_k = 0$ om luckan är stängd månad k, $x_k = 1$ om luckan är halvöppen månad k, $x_k = 2$ om luckan är öppen månad k.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k + a(x_k) - t_k$, där t_k är tillrinningen månad k och $a(x_k)$ är avrinningen, vilken ges i tabell i uppgiften ($a(0) = 0$, $a(1) = 3$, $a(2) = 7$).
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(e(x_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$, där $e(x_k)$ är uteffekten, vilken ges i tabell i uppgiften ($e(0) = 0$, $e(1) = 3$, $e(2) = 6$).
$x_k \in \{0, 1, 2\}$ för alla k, och $0 \leq s_k \leq 10$ för all k. $s_0 = 5$, $s_4 = 0$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-
1	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-
2	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$f_1(s_1)$	-	6	-	-	-	3	-	-	0	-	-
$\hat{x}_1(s_1)$	-	2	-	-	-	1	-	-	0	-	-

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	3
1	-	-	-	9	-	-	-	6	-	-	3
2	-	-	-	9	-	-	6	-	-	-	-
$f_2(s_2)$	-	-	-	9	-	-	6	6	-	-	3
$\hat{x}_2(s_2)$	-	-	-	2	-	-	2	1	-	-	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	-	-	-	-	-	9	-	-	6	6
1	-	-	-	12	-	-	9	9	-	-	6
2	-	-	12	12	-	-	9	-	-	-	-
$f_3(s_3)$	-	-	12	12	-	-	9	9	-	6	6
$\hat{x}_3(s_3)$	-	-	2	2	-	-	2	1	-	0	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	-	-	12	12	-	-	9	9	-	6
1	15	15	-	-	12	12	-	9	9	-	-
2	15	15	-	12	12	-	-	-	-	-	-
$f_4(s_4)$	15	15	-	12	12	12	-	9	9	-	6
$\hat{x}_4(s_4)$	2	2	-	0	1	1	-	1	1	-	0

(Om $\hat{x}_k$ inte är unik, har jag valt det största värdet. Man kan lika gärna välja det minsta.)

Uppnystning: $s_4 = 0$, $x_4 = 2$, $s_3 = 6$, $x_3 = 2$, $s_2 = 10$, $x_2 = 1$, $s_1 = 8$, $x_1 = 0$. $z = 15$. Svar i ord: Låt luckan vara stängd i månad 1, halvöppen i månad 2 och helt öppen i månad 3 och 4. Detta ger total uteffekt 15 GW. Vattenvolymen blir 8, 10, 6 och 0 milj m^3. (Denna lösning är inte unik.)

1b: För $s_4 = 4$ fås målfunktionsvärde 12 GW, vilket adderat till värdet 4 GW ger 16, som är mer än 15. Man tjänar alltså på att spara 4 milj m^3 i dammen.

Uppgift 2

För att kunna lösa subproblemet grafiskt, måste man relaxera första bivillkoret. Man får då två subproblem med två variabler vardera. Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + \bar{u}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3) =$
$(\bar{u} - 2)x_1 + (\bar{u} - 1)x_2 + (\bar{u} - 3)x_3 + (\bar{u} - 3)x_4 - 3\bar{u}$
då $x_1 + x_2 \leq 2,\ x_3 + 2x_4 \leq 2,\ x_3 \leq 1,\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

eller $\varphi(\bar{u}) = \varphi_1(\bar{u}) + \varphi_2(\bar{u}) - 3\bar{u}$ där

$\varphi_1(\bar{u}) = \min(\bar{u} - 2)x_1 + (\bar{u} - 1)x_2$ då $x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0$

$\varphi_2(\bar{u}) = \min(\bar{u} - 3)x_3 + (\bar{u} - 3)x_4$ då $x_3 + 2x_4 \leq 2,\ x_3 \leq 1,\ x_3, x_4 \geq 0$

2a: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi_1(0) = \min -2x_1 - x_2$ då $x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0$,
vilket har lösningen $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, och $\varphi_1(0) = -4$,
samt $\varphi_2(0) = \min -3x_3 - 3x_4$ då $x_3 + 2x_4 \leq 2,\ x_3 \leq 1,\ x_3, x_4 \geq 0$,
vilket har lösningen $x_3 = 1$, $x_4 = 0.5$, och $\varphi_2(0) = -4.5$,
vilket tillsammans ger $\varphi(0) = -8.5$. $\underline{v} = -8.5$. Subgradient $\xi = 0.5 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi_1(1) = \min -x_1$ då $x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0$,
vilket har lösningen $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, och $\varphi_1(0) = -2$,
samt $\varphi_2(1) = \min -2x_3 - 2x_4$ då $x_3 + 2x_4 \leq 2,\ x_3 \leq 1,\ x_3, x_4 \geq 0$,
vilket har lösningen $x_3 = 1$, $x_4 = 0.5$, och $\varphi_2(0) = -3$,
vilket tillsammans ger $\varphi(1) = -8$. $\underline{v} = -8$. Subgradient $\xi = 0.5 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi_1(2) = \min x_2$ då $x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, och $\varphi_1(0) = 0$,
samt $\varphi_2(2) = \min -x_3 - x_4$ då $x_3 + 2x_4 \leq 2,\ x_3 \leq 1,\ x_3, x_4 \geq 0$,
vilket har lösningen $x_3 = 1$, $x_4 = 0.5$, och $\varphi_2(0) = -1.5$,
vilket tillsammans ger $\varphi(1) = -7.5$. $\underline{v} = -7.5$. Subgradient $\xi = -1.5 < 0$. Lösningen tillåten. Övre gräns $\bar{v} = -4.5$.

Bästa gränser: $-7.5 \leq v^* \leq -4.5$.

2b: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan. Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -2x_1^{(l)} - x_2^{(l)} - 3x_3^{(l)} - 3x_4^{(l)} + u(x_1^{(l)} + x_2^{(l)} + x_3^{(l)} + x_4^{(l)} - 3) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

2c: Både $\bar{u} = 0$ och $\bar{u} = 1$ ger punkten (2,0,1,0.5), som ger snitt: $q \leq -8.5 + 0.5u$.
$\bar{u} = 2$ ger punkten (0,0,1,0.5), som ger snitt: $q \leq -4.5 - 1.5u$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -8.5 + 0.5u \\ & q \leq -4.5 - 1.5u \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Grafisk lösning visar att maximum fås i skärningen mellan de två snitten, $-8.5+0.5u = -4.5 - 1.5u$, vilket ger $u = 2$ och $q = -7.5$. Vi har nu $-7.5 \leq v^* \leq -7.5$, så vi har funnit optimum.

2d: Konvexkombinationen av subproblemlösningar blir $\sum_l \lambda_l x^{(l)} =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \text{ eftersom } \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Vi har $u = 2 > 0$, så vi ska ha $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, vilket blir $2\lambda_1 + 1 + 0.5 = 3$, dvs. $\lambda_1 = 0.75$. Detta ger den optimala lösningen $x_1 = 1.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0.5$.

Uppgift 3

3a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{lccccc} h(\bar{y}) = \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2\bar{y} \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 3 - \bar{y} \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 - 3\bar{y} \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{lccccc} h(\bar{y}) = \max & \multicolumn{5}{l}{(3 - \bar{y})u_1 + (4 - 3\bar{y})u_2 + 2\bar{y}} \\ \text{då} & u_1 & + & 2u_2 & \leq & 2 \\ & 2u_1 & - & 2u_2 & \leq & 3 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (3 - y)u_1^{(l)} + (4 - 3y)u_2^{(l)} + 2y = (2 - u_1^{(l)} - 3u_2^{(l)})y + C \;\; \text{för alla } l \\ & y \in \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

där $C = 3u_1^{(l)} + 4u_2^{(l)}$.

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

3b: För $\bar{y} = 0$:

$$\begin{array}{rlcccc} h(0) = \max & 3u_1 + 4u_2 & & & & \\ \text{då} & u_1 & + & 2u_2 & \leq & 2 \\ & 2u_1 & - & 2u_2 & \leq & 3 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Grafisk lösning ger $u_1 = 5/3$, $u_2 = 1/6$ (och $x_1 = 7/3$, $x_2 = 1/3$) med $h(0) = 17/3 \approx 5.67$. Benderssnittet blir $q \geq \frac{17}{3} - \frac{1}{6}y$, dvs. ungefär $q \geq 5.667 - 0.167y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq 5.667 - 0.167y \\ & y \in \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 3$ med $h(y) = \frac{31}{6} \approx 5.167$.

Vi har nu $5.167 \leq v^* \leq 5.667$.

För $\bar{y} = 3$:

$$\begin{array}{rlcccc} h(0) = \max & -5u_2 & & & & \\ \text{då} & u_1 & + & 2u_2 & \leq & 2 \\ & 2u_1 & - & 2u_2 & \leq & 3 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}.$$

Grafisk lösning ger $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ (och $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) med $h(3) = 6$. Övre gränsen förbättras ej. Benderssnittet blir $q \geq 2y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq 5.667 - 0.167y \\ & q \geq 2y \\ & y \in \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

Lös grafiskt, jämför heltalsvärden på y. Den bästa lösningen är $y = 2$ med $h(y) = \frac{16}{3} \approx 5.333$.

Vi har nu $5.333 \leq v^* \leq 5.667$. Det verkar som $y = 2$ är bäst, men där har vi inte löst subproblemet. Den bästa funna tillåtna lösningen är $y = 0$, med $x_1 = 7/3$ och $x_2 = 1/3$ (eftersom $y = 3$, med $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$ är lite sämre).

Uppgift 4

4a: Målfunktionen innehåller termer av typen $(c_j - ua_j)x_j$, så optimala värdet på x_j beror på tecknet på $c_j - ua_j$, och det skiftar då $u = c_j/a_j$. Om c_j/a_j är heltal för alla j, så kommer optimalt u att vara heltal.

4b: Oavsett hur mycket vi ökar u, så kommer subproblemlösningen aldrig att bli tillåten. Vi får aldrig någon övre gräns, och den undre gränsen ökar obegränsat. Optimalt värde på u kan sägas vara oändligt stor.

4c: Endast en av de primala variablerna blir större än noll i LP-optimum. (Motivering: Baslösning.) Så fort det blir lönsamt att öka en primal variabel i Lagrangerelaxationen, kommer vi att öka den oändligt mycket (och få en väldigt dålig undre gräns). I duala optimum kommer den bästa primala variabeln därför att få koefficient noll, vilket gör att en optimal subproblemlösning blir att sätta alla primala variablerna till noll.

4d: Om ett problem har obegränsad lösning, kommer varje relaxation av det också att ha obegränsad lösning, så oavsett vilket u vi stoppar in, får subproblemet obegränsat bra lösning. Undre gränsen blir minus oändligheten.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: Inför två binära variabler, $y_1 = 1$ om vi använder grossister och $y_2 = 1$ om vi använder mellanlager, och tillför bivillkoret $y_1 + y_2 \leq 1$. Se sedan till att $y_1 = 0$ leder till att inga grossister används, med ett bivillkor av typen $y_j^G \leq y_1$ för varje grossist j (där y_j^G är den redan existerande binära variabeln för grossister). Gör på samma sätt för mellanlager, $y_k^L \leq y_2$ för varje mellanlager k.

5b: Inför kapacitet noll på alla vägar som inte kan användas. För att göra minimala ändringar av lösningen får man införa nya termer i målfunktionen som ger kostnad för avsteg från förra lösningen. Se dock till att dessa termer blir linjära.

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: Om bilen drar mer el, kommer batterinivån att sjunka snabbare, vilket ger andra tillstånd. Detta betyder att i princip allt kommer att ändras i tabellerna. Man kan utvärdera befintlig lösning, och man kan även göra ny uppnystning, men inget av detta ger säkert optimum, och kanske inte ens en tillåten lösning. Så svaret är nog nej, man kan inte uppdatera lösningen på ett smidigt sätt.

Om sannolikheten är känd (0.5), kan man ersätta urladdningskoefficienterna med 0.5 gånger fallet fint väder plus 0.5 gånger fallet fult väder. Detta kan ge en vettig uppskattning av total kostnad, men någon användbar lösning ska man inte räkna med.

6b: Om bara kostnaderna ändras, blir det lite enklare. Varje tillåten lösning är fortfarande tillåten, och dess målfunktionsvärde kan räknas ut. Den billigaste lösningen blir dyrare, men är fortfarande billigast.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: Man kan införa tid (se tidigare tentor för detaljer).

Det finns egentligen flera kraftledningar, så nätverket blir större. (Detta ger ett större subproblem, men Vineopt kommer att kunna lösa det snabbt.)

Om man har flera utbyggnadsalternativ, antingen flera ledningar som kan ändras, eller flera alternativ för varje ledning, blir masterproblemet större och svårare, och man kan förvänta sig många fler Bendersiterationer. (Dock är det nog inte realistiskt med väldigt många utbyggnadsalternativ.)

Kostnader och kapaciteter för utbyggnader är säkert mer varierade än i exemplet, men detta gör nog inte problemet svårare att lösa.

Man kan fundera på att införa flera efterfrågenoder, vilket skulle göra nätverket större, men i praktiken kommer man nog alltid att ha hopklumpade efterfrågeområden.

7b: Man får vända på vissa detaljer i modellen, men den blir i princip ganska lika den ursprungliga. Jag skulle låta $y = 1$ betyda att man tog bort ledningen. Man får då se till att kapaciteten blir noll då $y = 1$. I praktiken får man då krav på att behålla tillräcklig kapacitet så att det finns en tillåten lösning. (Om man inte ordnar det i förväg, får man använda Benders tillåtenhetssnitt.)

En förutsättning för att Bendersdekomposition ska vara en passande metod, är att antalet ledningar man kan ta bort inte är för stort. Om alla ledningar skulle kunna tas bort, blir masterproblemet troligen alldeles för svårt.

Uppgift 8 (kortfattat)

8a: Detta innebär en övre och undre gräns på hur lång en tur får vara. I en matematisk modell är detta enkelt att införa, men det kan vara lite svårare, men fortfarande möjligt, i metoderna. När man funderar på att flytta vägar mellan fordon, måste man ta hänsyn till detta. Det kan också dyka upp fall där de nödvändiga vägarna (required links) inte är för mycket, men där en rundtur som täcker dem blir för lång. Det krävs alltså betydligt fler kontroller och hantering av specialfall.

8b: Det blir nog inte svårare att lösa problemet med depåer. Man är ju då bara intresserad av turer som börjar och slutar i depån. Det begränsar dock utrymmet för optimering, och kommer att leda till dyrare lösningar (t.ex. om alla fordon har samma depå kommer flera fordon att behöva köra en bit innan de kan börja göra nytta).