Tekniska Högskolan i Linköping — Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen — Lösning till tentamen
Optimeringslära — 2015-08-25
Kaj Holmberg

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Definitioner: Tillstånd: s_k = del av anläggningskostnadsbudget som får användas till de k första byggnadstyperna.
Styrning: x_k = antal man bygger av typ k.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k(x_k)$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(v_k(x_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 6$ för all k. $s_0 \geq 0$, $s_3 = 6$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	1	1	1	1	1
2	-	-	-	2	2	2	2
3	-	-	-	-	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	0	1	2	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	1	2	3	3	3

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	1	2	3	3	3
5	-	-	2	2	3	4	5
10	-	-	-	5	5	6	7
$f_2(s_2)$	0	0	4	5	5	6	7
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	5	10	10	10	10

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	2	5	5	6	7
1	-	-	-	-	-	6	6
$f_3(s_3)$	0	0	2	5	5	6	7
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	1	0	

Uppnystning: $s_3 = 6$, $x_3 = 0$, $s_2 = 6$, $x_2 = 10$, $s_1 = 3$, $x_1 = 2$. $z = 7$.
Svar i ord: Bygg 2 hyreshus och 10 villor, vilket ger vinsten 7.

1b: För $s_3 = 4$ fås målfunktionsvärde 6, vilket är 1 mindre än i uppgift a. Om anläggningskostnader och vinst hamnar på samma konto, räcker det med att den insparade enheten ökar i värde något för att det ska vara bättre.

1c: Om $x_3 = 1$ fås vinsten 6 (och inga andra byggander), så Bosse förlorar 1.

Uppgift 2

Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -5x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 4x_4 + u_1(2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3) + u_2(4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5)$
$= (2u_1 - 5)x_1 + (3u_1 + 4u_2 - 7)x_2 + (-u_1 + 3u_2 - 3)x_3 + (2u_2 - 4)x_4 - 3u_1 - 5u_2$
då $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$

2a: $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 0$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -5x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 4x_4$ då $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$ vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -19$, vilket ger $\underline{v} = -19$. Subgradient: $\xi_1 = 1 > 0$, $\xi_2 = 4 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u}_1 = 1$, $\bar{u}_2 = 1$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - x_3 - 2x_4 - 8$ då $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$ vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (ej unikt), $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -14$, vilket ger $\underline{v} = -14$. Subgradient: $\xi_1 = -2 < 0$, $\xi_2 = 0$. Lösningen tillåten, $\bar{v} = -12$.

Bästa gränser: $-14 \leq v^* \leq -12$.

2b: I den bästa punkten $\bar{u}_1 = 1$, $\bar{u}_2 = 1$, är $\xi_1 = -2 < 0$ (och $\xi_2 = 0$), så man ska nog minska u_1 lite.

2c: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan. Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq a_0^{(l)} + a_1^{(l)} u_1 + a_2^{(l)} u_2 \quad \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

där $a_0^{(l)} = -5x_1^{(l)} - 7x_2^{(l)} - 3x_3^{(l)} - 4x_4^{(l)}$, $a_1^{(l)} = 2x_1^{(l)} + 3x_2^{(l)} - x_3^{(l)} - 3$ och $a_2^{(l)} = 4x_2^{(l)} + 3x_3^{(l)} + 2x_4^{(l)} - 5$.

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

2d: $\bar{u}_1 = 0$ och $\bar{u}_2 = 0$ ger punkten (1, 1, 1, 1), som ger snitt: $q \leq -19 + u_1 + 4u_2$.
$\bar{u}_1 = 1$ och $\bar{u}_2 = 1$ ger punkten (1, 0, 1, 1), som ger snitt: $q \leq -12 - 2u_1$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \max & q \\ \text{då} & q \leq -19 + u_1 + 4u_2 \\ & q \leq -12 - 2u_1 \\ & u \geq 0 \end{array}$$

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -19\lambda_1 - 12\lambda_2 \\ \text{då} & -\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0 \\ & -4\lambda_1 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array}$$

Det andra bivillkoret ger $\lambda_1 \leq 0$, så då måste vi ha $\lambda_1 = 0$, vilket direkt ger $\lambda_2 = 1$. Detta ger $v_{DM} = -12$.

Komplementaritet ger $q = -12 - 2u_1$, vilket med $q = v_{DM} = -12$ ger $u_1 = 0$. Det andra bivillkoret säger nu $-12 \leq -19 + 4u_2$, dvs. $u_2 \geq 7/4$. Det finns ingen anledning att använda något annat är $u_2 = 7/4$.

Bästa gränser: $-14 \leq v^* \leq -12$.

Det visade sig korrekt att minska u_1, även om denna lösning inte säkert är optimal.

Uppgift 3

Det skulle ha varit omvänt tecken på högerleden i problemet. Om man gör den ändringen blir lösningen följande:

3a:

Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{llllll} h(\bar{y}) = \min & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 2\bar{y} \\ \text{då} & -2x_1 & - & x_2 & \geq & -4 - 2\bar{y} \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \geq & -3 - 2\bar{y} \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{llllll} h(\bar{y}) = \max & \multicolumn{5}{l}{(-4 - 2\bar{y})u_1 + (-3 - 2\bar{y})u_2 + 2\bar{y}} \\ \text{då} & -2u_1 & - & u_2 & \leq & -2 \\ & -u_1 & - & 2u_2 & \leq & -2 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (-4 - 2y)u_1^{(l)} + (-3 - 2y)u_2^{(l)} + 2y = (2 - 2u_1^{(l)} - 2u_2^{(l)})y + C \quad \text{för alla } l \\ & y \in \{0, 1, 2\} \end{array}$$

där $C = -4u_1^{(l)} - 3u_2^{(l)}$.

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

3b: För $\bar{y} = 0$:

$$\begin{array}{llllll} h(0) = \max & \multicolumn{5}{l}{-4u_1 - 3u_2} \\ \text{då} & -2u_1 & - & u_2 & \leq & -2 \\ & -u_1 & - & 2u_2 & \leq & -2 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Grafisk lösning ger $u_1 = 2/3$, $u_2 = 2/3$ med $h(0) = -14/3 \approx -4.67$. Benderssnittet blir $q \geq -\frac{14}{3} - \frac{2}{3}y$, dvs. ungefär $q \geq -4.67 - 0.67y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -\frac{14}{3} - \frac{2}{3}y \\ & y \in \{0, 1, 2\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 2$ med $q = -6$. Vi har nu $-6 \leq v^* \leq -4.67$.

För $\bar{y} = 2$:

$$\begin{array}{rrcrcr} h(2) = \max & -8u_1 - 7u_2 + 4 & & & & \\ \text{då} & -2u_1 & - & u_2 & \leq & -2 \\ & -u_1 & - & 2u_2 & \leq & -2 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}.$$

Grafisk lösning ger $u_1 = 2/3$, $u_2 = 2/3$ med $h(0) = -6$. Komplementaritet ger $x_1 = 3$ och $x_2 = 2$.

Vi har nu $-6 \leq v^* \leq -6$, så optimum är funnet. Den bästa funna tillåtna lösningen är $y = 2$, med $x_1 = 3$ och $x_2 = 2$.

Om man inte gör ändringen:

Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rrcrcr} h(\bar{y}) = \min & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 2\bar{y} \\ \text{då} & -2x_1 & - & x_2 & \geq & 4 - 2\bar{y} \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \geq & 3 - 2\bar{y} \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rrcrcr} h(\bar{y}) = \max & (4 - 2\bar{y})u_1 + (3 - 2\bar{y})u_2 + 2\bar{y} & & & & \\ \text{då} & -2u_1 & - & u_2 & \leq & -2 \\ & -u_1 & - & 2u_2 & \leq & -2 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (4 - 2y)u_1^{(l)} + (3 - 2y)u_2^{(l)} + 2y = (2 - 2u_1^{(l)} - 2u_2^{(l)})y + C \ \text{ för alla punkter } l \\ & 0 \geq (4 - 2y)u_1^{(l)} + (3 - 2y)u_2^{(l)} = (-2u_1^{(l)} - 2u_2^{(l)})y + C \ \text{ för alla riktningar } l \\ & y \in \{0, 1, 2\} \end{array}$$

där $C = 4u_1^{(l)} + 3u_2^{(l)}$.

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

3b: För $\bar{y} = 0$:

$$\begin{array}{rrcrcr} h(0) = \max & 4u_1 + 3u_2 & & & & \\ \text{då} & -2u_1 & - & u_2 & \leq & -2 \\ & -u_1 & - & 2u_2 & \leq & -2 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Den duala lösningen är obegränsad, med t.ex. riktningen $\tilde{u}_1 = 1$, $\tilde{u}_2 = 0$. Ingen övre gräns fås. Benderssnittet blir ett tillåtenhetssnitt: $0 \geq 4 - 2y$, dvs. $y \geq 2$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & y \leq 2 \\ & y \in \{0,1,2\} \end{array}$$

Den enda tillåtna lösningen är $y = 2$. Ingen undre gräns fås.

För $\bar{y} = 2$:

$$\begin{array}{rrcrcr} h(2) = \max & -u_2 + 4 & & & & \\ \text{då} & -2u_1 & - & u_2 & \leq & -2 \\ & -u_1 & - & 2u_2 & \leq & -2 \\ & u_1, & & u_2 & \geq & 0 \end{array}.$$

Grafisk lösning ger $u_1 = 2$, $u_2 = 0$ (och $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) med $h(2) = 4$. Benderssnittet blir $q \geq 8 - 2y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & y \leq 2 \\ & q \geq 8 - 2y \\ & y \in \{0,1,2\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 2$ med $q = 4$.

Vi har nu $4 \leq v^* \leq 4$, så optimum är funnet. Den bästa funna tillåtna lösningen är $y = 2$, med $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$.

(Som synes ett dåligt exempel, men metoden fungerar ändå.)

Uppgift 4

4a: Den primala lösningen är inte optimal: Mer exakt, varje dualt bivillkor som inte är uppfyllt motsvarar en reducerad kostnad i primalen som har fel tecken.

4b: Reducerad kostnad: $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$: $\hat{c}_1 = 20-2-9-8 = 1 > 0$, $\hat{c}_2 = 9-2-3-4 = 0$. Ökning av x_1 skulle ge (lika stor) ökning av målfunktionsvärdet, medan ökning av x_2 inte ändrar målfunktionsvärdet. Välj x_1.

4c: Vi vill finna $\max_j \hat{c}_j = \max_a c(a) - a^T y$, vilket blir
$\max 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 - a_1 - 3a_2 - 2a_3 = 3a_1 + a_2 + 2a_3$
då $3a_1 + 2a_2 + a_3 \leq 5$ och $a_1, a_2, a_3 \geq 0$.

Lösning av LP-relaxationen (med metoden i boken) ger $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 5$, med målfunktionsvärde 10. En bra kolumn ges alltså av $a^T = (0, 0, 5)$.

4d: Kolumngenerering används i Dantzig-Wolfedekomposition för att skapa nya kolumner i det ofullständiga masterproblemet.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: För tomförpackningar blir det blir 5 000 000 variabler mellan butik och grossist, 1 000 000 variabler mellan butik och bryggeri, och lika många för fulla förpackningar åt andra hållet. Detta gör att LP-problemet blir väldigt stort. Dessutom fås 700 binära variabler för användande av grossister, bryggerier och mellanlager, vilket gör att många förgreningar troligen behövs.

5b: Det vore nog bra att relaxera bivillkor så att problemet separerar i ett problem per butik. I Bendersdekomposition måste man fixera samtliga binära variabler, eftersom subproblemet måste vara linjärt. (Det är osäkert om dessa angreppssätt ger effektiva metoder.)

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: Modellera laddningsstationerna som en sträcka med två val, antingen ingen laddning, dvs. ingen tid/kostnad och ingen ändring av batterinivån, eller laddning, dvs. den kostnad/tid laddningen tar, och motsvarande ökning av batterinivån.

6b: Detta ger flera möjligheter vid laddningsstationerna. Man måste diskretisera för att få ett ändligt antal, och detta antal blir troligen väldigt stort. Å andra sidan är det bara vid laddningsstationerna detta händer, så ökningen av lösningstid blir nog inte så våldsam.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: Subproblemet blir ett minkostnadsflödesproblem med 1000 bågar. Det tar lite längre tid att lösa med Vineopt, men troligen inte väldigt mycket längre.

7b: Masterproblemet får 50 binära variabler, och kan bli mycket svårare. Dessutom blir antalet iterationer troligen betydligt större. (Här finns en risk att Bendersdekomposition kan bli ett dåligt metodval.)

Uppgift 8 (kortfattat)

Det som gjordes för hand var att flytta vissa länkar från det fordon som gör mest till ett fordon som gör minst. Dessa länkar måste givetvis ligga i anslutning till det andra fordonets område. Ofta är det bättre att flytta mer än en länk, t.ex. en cykel.

Så algoritmen måste först hitta det fordon som gör mest, och det fordon som gör minst (eller åtminstone betydligt mindre), och som har områden angränsande till det första fordonets område. Sedan måste man hitta länkar som ligger nära gränsen mellan de båda områdena, och helst en sammanhängande tur att flytta från det ena till det andra.