Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2016-01-13

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om Sven köper vara j.

max $z = 10x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 5x_4$
då $30x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 10x_4 \leq 80$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4$.

Lösningen ändras ej om man dividerar kappsäcksvillkoret med 10, vilket ger
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8$.

1b: Indata: c_k : värde av vara k, a_k : vikt av vara k.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = så mycket vikt (10 kg) som Sven får använda till de k första varorna.
Styrning: $x_k = 1$ om vara k inköpes, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 8$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_4 = 8$. $f_0(s_0) = 0$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	10	10	10	10	10	10
$f_1(s_1)$	0	0	0	10	10	10	10	10	10
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	10	10	10	10	10	10
1	-	-	12	12	12	22	22	22	22
$f_2(s_2)$	0	0	12	12	12	22	22	22	22
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	12	12	12	22	22	22	22
1	-	-	-	-	7	7	19	19	19
$f_3(s_3)$	0	0	12	12	12	22	22	22	22
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	12	12	12	22	22	22	22
1	-	5	5	17	17	17	27	27	27
$f_4(s_4)$	0	5	12	17	17	22	27	27	27
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	0	1	1	0	1	1	1

Uppnystning: $s_4 = 8$, $x_4 = 1$, $s_3 = 7$, $x_3 = 0$, $s_2 = 7$, $x_2 = 1$, $s_1 = 5$, $x_1 = 1$, $s_0 = 2$. $z = 27$.
Svar i ord: Köp TVn, datorn och dammsugaren, men inte diskmaskinen. Total värde: 27. Outnyttjad vikt 20 kg.

1c: Eftersom $s_0 = 2$, borde vi få samma lösning, men med $s_0 = 1$.
Jag gör dock om uppnystningen, för extra kontroll: $s_4 = 7$, $x_4 = 1$, $s_3 = 6$, $x_3 = 0$, $s_2 = 6$, $x_2 = 1$, $s_1 = 4$, $x_1 = 1$, $s_0 = 1$. $z = 27$. Samma optimallösning.

Uppgift 2

$$
\begin{aligned}
v^* = \quad & \min \quad -10x_1 - 12x_2 - 7x_3 - 5x_4 \\
& \text{då} \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 \\
& \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -10x_1 - 12x_2 - 7x_3 - 5x_4 + u(3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 8) =$
$(3u - 10)x_1 + (2u - 12)x_2 + (4u - 7)x_3 + (u - 5)x_4 - 8u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

$\bar{u} = 0$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -10x_1 - 12x_2 - 7x_3 - 5x_4$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -34$, vilket ger $\underline{v} = -34$. Subgradient: $\xi = 2 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 4$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - x_4 - 32$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -37$, vilket inte ger bättre undre gräns. Subgradient: $\xi = -5 < 0$. Lösningen tillåten, $\bar{v} = -17$.

Bästa gränser nu: $-34 \leq v^* \leq -17$.

$\bar{u} = 6$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min 8x_1 + 17x_3 + x_4 - 48$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (ej unikt), $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, och $\varphi(\bar{u}) = -48$, vilket ger inte ger en bättre undre gräns. Subgradient: $\xi = -8 < 0$. Lösningen tillåten, men $v = 0$ förbättrar inte övre gränsen.

Bästa gränser: $-34 \leq v^* \leq -17$. Vi vet inte om vi har funnit optimum.

2b: Vi vill alltså att minimering av $(3u - 10)x_1 + (2u - 12)x_2 + (4u - 7)x_3 + (u - 5)x_4$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Detta kräver att $(3u - 10) \geq 0$, $(2u - 12) \leq 0$,$(4u - 7) \geq 0$, $(u - 5) \leq 0$, dvs. $u \geq 10/3$, $u \leq 6$, $u \geq 7/4$, $u \leq 5$, vilket tillsammans ger $10/3 \leq u \leq 5$, dvs. $3.333 \leq u \leq 5$.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -10x_1^{(l)} - 12x_2^{(l)} - 7x_3^{(l)} - 5x_4^{(l)} + u_1(3x_1^{(l)} + 2x_2^{(l)} + 4x_3^{(l)} + x_4^{(l)} - 8) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: $\bar{u} = 0$ gav punkten (1, 1, 1, 1), som ger snitt: $q \leq 2u - 34$.
$\bar{u} = 4$ gav punkten (0, 1, 0, 1), som ger snitt: $q \leq -5u - 17$.
$\bar{u} = 6$ gav punkten (0, 0, 0, 0), som ger snitt: $q \leq -8u$.
($\bar{u} = 6$ kan också ge punkten (0, 1, 0, 0), som ger snitt: $q \leq -6u - 12$.)

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \max & q \\ \text{då} & q \leq 2u - 34 \\ & q \leq -5u - 17 \\ & q \leq -8u \quad (\text{eller } q \leq -2u - 12) \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Grafisk lösning ger optimum i skärningen av första och andra snittet, $u = 17/7 \approx 2.42$ och $q = 204/7 \approx -29.14$. Bästa gränser nu: $-34 \leq v^* \leq -29.14$.

3c: $\bar{u} = 17/7$ ger
$\varphi(\bar{u}) = \min -19/7x_1 - 50/7x_2 + 19/7x_3 - 18/7x_4 - 136/7$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -223/7 \approx -31.86$, vilket ger en bättre undre gräns. Bästa gränser nu: $-31.86 \leq v^* \leq -29.14$. Nytt snitt: $q \leq -2u - 27$.

3d: Grafisk lösning av masterproblemet ger $u = 7/4$ och $q = -30.5$. Aktiva snitt är det första och det sista. Bästa gränser nu: $-31.86 \leq v^* \leq -30.5$.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -34\lambda_1 - 17\lambda_2 - 27\lambda_4 \\ \text{då} & -2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 + 2\lambda_4 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 0$ (eftersom motsvarande bivillkor inte är aktiva) samt $-2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$ (eftersom $u > 0$). Kvar är $-2\lambda_1 + 2\lambda_4 = 0$, dvs. $\lambda_1 = \lambda_4$, vilket tillsammans med $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ ger $\lambda_1 = 1/2$ och $\lambda_4 = 1/2$.

Den primala lösningen blir $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_4 x^{(4)} = 0.5(1,1,1,1) + 0.5(1,1,0,1) =$

$(1, 1, 0.5, 1)$.

Är detta optimum? Ett sätt att svara är att lösa subproblemet med $\bar{u} = 7/4$. Detta skulle ge $\varphi(\bar{u}) = \min -19/4x_1 - 17/2x_2 - 13/4x_4 - 14$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ (ej unik), $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -30.5$, vilket ger gränserna $-30.5 \leq v^* \leq -30.5$, som bevisar att vi har optimun.

(Ett annat sätt är att notera att x-lösningen uppfyller det relaxerade bivillkoret exakt, vilket ger subgradient $\xi = 0$, vilket indikerar optimum.)

3e: Denna fråga blev lite dum. Om $u = 3$ hade ingått i uppgift 2, hade den varit mer intressant. Då gäller nämligen följande: $u = 3$ i subproblemet ger rätt heltalig x-lösning, $(1, 1, 0, 1)$, och den lösningen fås för alla u i intervallet 1.75 - 3.33 (jämför med uppgift 2b). För att få rätt LP-lösning, $(1, 1, 0.5, 1)$, krävs dock exakt $u = 1.75$, eftersom optimalt värde på x_3 ska kunna vara vad som helst mellan 0 och 1. LP-problemet kräver alltså mer exakt styrning av Lagrangemultiplikatorerna.

Uppgift 4

$$\begin{array}{rll} v^* = & \min & -10x_1 - 12x_2 - 7x_3 - 5x_4 + 20y \\ & \text{då} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 + 4y \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, y \in \{0, 1\} \end{array}$$

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rlrcrcrcrcl} \psi(\bar{y}) = & \min & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 7x_3 & - & 5x_4 & + & 20\bar{y} \\ & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \leq & 8 + 4y \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rlrcr} \psi(\bar{y}) = & \max & (-8 - 4\bar{y})u + 20\bar{y} & & \\ & \text{då} & -3u & \leq & -10 \\ & & -2u & \leq & -12 \\ & & -4u & \leq & -7 \\ & & -u & \leq & -5 \\ & & u & \geq & 0 \end{array}$$

Sätt $U = \{u : 3u \geq 10, 2u \geq 12, 4u \geq 7, u \geq 5, u \geq 0\}$. Subproblemet blir då $\psi(\bar{y}) = \max(-8 - 4\bar{y})u + 20\bar{y}$ då $u \in U$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (-8 - 4y)u^{(l)} + 20y \;\; \text{för alla } l \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = 0$: $\psi(\bar{y}) = \max -8u$ då $u \in U$.
Lösningen är det minsta tillåtna värdet på u: $u = 6$ (där det andra duala bivillkoret

är aktivt), med $\psi(0) = -48$. Benderssnittet blir $q \geq -48 - 4y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -48 - 4y \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 1$ med $q = -52$. Vi har nu $-52 \leq v^* \leq -48$.

För $\bar{y} = 1$: $\psi(\bar{y}) = \max -12u + 20$ då $u \in U$.
Lösningen är igen det minsta tillåtna värdet på u: $u = 6$ (där det andra duala bivillkoret är aktivt), med $\psi(1) = -52$. Benderssnittet blir samma som förra gången. Vi har nu $-52 \leq v^* \leq -52$, vilket indikerar optimum.

Komplementaritet för subproblemet ger $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ och $x_4 = 0$ (eftersom motsvarande duala bivillkor är inaktiva), samt $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$ (eftersom $u > 0$). Detta ger $x_2 = 6$.

Den bästa funna tillåtna lösningen är alltså $y = 1$, med $x_2 = 6$ samt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ och $x_2 = 0$, och detta är optimum. Svar i ord: Hyr släpvagnen och köp sex datorer.

4c: Det tillåtna området till subproblemet är U, och om vi rensar bort redundanta bivillkor ser vi att $U = \{u : u \geq 6\}$. Detta område har alltså endast en extrempunkt, $u = 6$, vilket betyder att det bara finns *ett* Benderssnitt.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: Projektet visade att det var svårt att uppnå detta genom att höja inköpspriset för material, eftersom transportkostnaderna dominerade så mycket. Dessutom bestäms pris på andra sätt, och påverkar även andra varor. En väldigt hög straffskatt på tomförpackningar (uttagen via höjd pant) skulle kanske hjälpa, men skulle då höja priset på dryckerna. (Även om man får tillbaka pengarna då man pantar, får man ligga ute med pengarna under en viss tid.) Detta skulle kunna ge vikande försäljning, eller att fabrikanter övergår till billigare förpackningar helt utan retur.

En annan möjlighet kan vara att sänka transportkostnaderna. Detta skulle kunna ske genom att staten subventionerade transporterna till en viss del. Man kan också tänka sig ytterligare optimering för att sänka transportkostnaderna, t.ex. genom effektivare transporter och/eller hantering el.dyl.

5b: 1. Lagrangerelaxation: Relaxera bivillkor så att problemet separerar i ett problem per butik. Klarar heltaliga variabler. Nackdel: Många bivillkor måste relaxeras, ger många multiplikatorer som måste bestämmas.

2. Dantzig-Wolfedekomposition: Inte bra p.g.a. heltalsvariabler.

3. Bendersdekomposition: Fixera samtliga binära variabler. (Subproblemet måste nämligen vara linjärt.) Subproblemet blir ett LP-problem, som går snabbare att lösa. Nackdel: Många heltalsvariabler ger ett stort och svårt masterproblem.

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: Det “enkla” alternativet: Optimera framdrivningssätt för varje väg först, välj sedan den bästa av vägarna. Fungerar bara om antalet vägar är litet. (Observera: Ett visst antal korsningar kan ge ett mycket större antal vägar.)

Alternativ med dynamisk programmering: Ett tillstånd får bestå av två saker, dels batterinivån och dels vilken plats (nod i nätverket) man kommer till. Man måste undersöka samtliga kombinationer av dessa. Styrningen innehåller då både val av framdrivningssätt och val av väg (jämför med standardformuleringar av dynamisk programmering för billigaste väg).

I ett verkligt fall kanske det bara finns tre-fyra vägskäl längs vägen där båda alternativen är rimliga, och i varje steg kanske bara tre-fyra alternativa platser. Dessutom kommer en viss nod bara att kunna nås från noden innan på just den vägen, så många kombinationer tillstånd - styrning kan elimineras.

6b: Det största skillnaden är att man inte kan fylla på bensin, så tanken måste räcka hela vägen. Därför måste man ha bensinnivån som ytterligare tillstånd, och hålla reda på den hela tiden, så att bensinen inte tar slut. Batterinivån och bensinnivån är uppenbarligen kopplade, men inte enkelt linjärt. Alla kombinationer av dessa tillstånd måste undersökas, men flera kan elimineras, eftersom en hög nivå på det ena medför en lägre nivå på det andra.

Det finns dock inte fler styrningar än tidigare, så optimeringen till ett visst tillstånd blir inte svårare.

Det finns en ökad risk för att vissa problem saknar tillåten lösning, då både batteriladdning och bensin kan ta slut.

Uppgift 7 (kortfattat)

Varje möjlig utbyggnad kommer då att modelleras av flera binära variabler. Det betyder att valfriheten och antalet variabler kommer att öka mycket, och att Benders masterproblem kommer att bli svårare.

Om del 3 inte kan göras om inte del 1 och/eller del 2 har gjorts, kan det modelleras som $x_3 \leq x_1 + x_2$, med binära variabler. Det gör att alla kombinationer av de binära variablerna inte kommer att vara tillåtna.

Dessa komplikationer uppträder bara i masterproblemet. Subproblemet blir inte svårare, och det totala antalet snitt ökar i princip inte. Masterproblemet får dock flera variabler, dvs. flera dimensioner, så flera iterationer kan nog förväntas.

Uppgift 8 (kortfattat)

Det som kan ha gjorts för hand är följande.

1. Identifiera “isolerade” länkar, dvs. länkar som ligger en bit ifrån resten av det fordonets tur. Flytta dessa länkar till en mer närliggande tur.

2. Identifiera det fordon som använder mest tid och ett fordon som använder betydligt mindre tid (ev. minst). Flytta länkar från det första fordonet till det andra. Dessa

länkar bör ligga i anslutning till det andra fordonets område. Det kan vara bättre att flytta mer än en länk, t.ex. en cykel.

Man kan här också ta hänsyn till vilka länkar som passeras av mer än ett fordon.

(Observera att Snowplan redan nu innehåller procedurer för att flytta cykler från ett fordon till ett annat.)

Algoritmiskt är det mycket lätt att hitta de fordon som kräver mest och minst tid. Det är lite svårare att hitta länkar som ligger på lämpliga platser, och ännu svårare att hitta lämpliga cykler att flytta.

Antingen begränsar man sig till fordon som har angränsande områden, eller så kan förflyttningen av länkar behöva ske via andra områden. För att uppnå målet att flytta länkar från A till B kan man då behöva flytta några länkar från A till C, och sedan några andra länkar från C till B. Det senare blir ännu svårare (och är inte implementerat i Snowplan).

Det visar sig i praktiken att en lösning där fordonens tider är väldigt lika, ofta är en bra lösning, så man skulle kunna ha det som ett explicit mål i modellen. Som det är nu är denna koppling indirekt, via maxtid och uträkning av målfunktionsvärde.