Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2016-03-30

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Det kostar 1 miljard i Linköping och Norrköping oavsett hur man gör. Enklast är att ta bort dessa från problemet och optimera resten. Kostnaden blir då en enhet mindre för Linköping och Norrköping, och högerledet minskas till 8.

(Det är inte omöjligt att lösa problemet utan denna förenkling, men räkningarna blir svårare.)

Variabeldefinition: $x_j = 1$ om vi bygger station på plats j, 0 om inte, samt $x_3 = 2$ om vi bygger tunnel i Linköping.

max $z = x_1 + 2x_2 + c_3(x_3) + 2x_4$
då $3x_1 + 4x_2 + a_3(x_3) + 4x_4 \leq 8$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 4$, $x_3 \in \{0, 1, 2\}$,

där

x_3	c_3	a_3
0	0	0
1	3	3
2	4	6

Att dela upp x_3 i två binära variabler är inte bra, eftersom det skulle införa en otillåten koppling mellan två steg.

1b: Indata: c_k : nytta, a_k : kostnad.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = den kostnad (miljarder) som får användas till de k första orterna.
Styrning: $x_k = 1$ om en station byggs på ort k, 0 om inte, samt $x_3 = 2$ om tunnel byggs i Linköping.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k(x_k)$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k(x_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 8$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_4 = 8$. $f_0(s_0) = 0$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	1	1	1	1	1	1
$f_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	-	-	-	-	2	2	2	3	3
$f_2(s_2)$	0	0	0	1	2	2	2	3	3
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	1	2	2	2	3	3
1	-	-	-	3	3	3	4	5	5
2	-	-	-	-	-	-	4	4	4
$f_3(s_3)$	0	0	0	3	3	3	4	5	5
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	1	1	1	2	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	3	3	3	4	5	5
1	-	-	-	-	2	2	2	5	5
$f_4(s_4)$	0	0	0	3	3	3	4	5	5
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Uppnystning: $s_4 = 8$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 1$, $s_2 = 1$, $x_2 = 0$, $s_1 = 1$, $x_1 = 0$, $s_0 = 1$. $z = 5$.
Svar i ord: Bygg station (ej tunnel) i Linköping och station i Jönköping. Nyköping och Norrköping blir utan. (Det finns en lika bra lösning med station i Norrköping, men inte i Jönköping.) Total nytta: 5. Outnyttjat kapital 1 miljard.

1c: Kostnaderna (resursutnyttjandet) i steg 3 minskas med ett, vilket betyder att siffrorna flyttas ett steg åt höger, vilket förändrar $f_3(x_3)$, så steg 4 måste uppdateras.

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	1	2	2	2	3	3
1	-	-	3	3	3	4	5	5	5
2	-	-	-	-	-	4	4	4	4
$f_3(s_3)$	0	0	3	3	3	4	5	5	5
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	1	1	2	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	3	3	3	4	5	5	5
1	-	-	-	-	2	2	5	5	5
$f_4(s_4)$	0	0	3	3	3	4	5	5	5
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Uppnystning: $s_4 = 8$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 0$, $s_1 = 2$, $x_1 = 0$, $s_0 = 2$. $z = 5$.
Svar i ord: Det blir ingen skillnad i lösningen, bara en miljard till över.

Uppgift 2

$$\begin{array}{rll} v^* = & \min & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ & \text{då} & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 8 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + u(3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 8) =$
$(3u-1)x_1 + (4u-2)x_2 + (3u-3)x_3 + (4u-2)x_4 - 8u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

$\bar{u} = 0$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -8$, vilket ger $\underline{v} = -8$. Subgradient: $\xi = 6 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 0.4$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min 0.2x_1 - 0.4x_2 - 1.8x_3 - 0.4x_4 - 3.2$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -5.8$, vilket ger $\underline{v} = -5.8$. Subgradient: $\xi = 3 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 0.6$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min 0.6x_1 + 0.4x_2 - 1.2x_3 + 0.4x_4 - 4.8$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, och $\varphi(\bar{u}) = -6$, vilket ger inte ger en bättre undre gräns. Subgradient: $\xi = -5 < 0$. Lösningen tillåten, och vi får $\bar{v} = -3$.

Bästa gränser: $-5.8 \leq v^* \leq -3$. Vi vet inte om vi har funnit optimum.

2b: Vi vill alltså att minimering av $(3u-1)x_1 + (4u-2)x_2 + (3u-3)x_3 + (4u-2)x_4$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. Detta kräver att $(3u-1) \geq 0$, $(4u-2) \geq 0$,$(3u-3) \leq 0$, $(4u-2) \geq 0$, dvs. $u \geq 1/3$, $u \geq 0.5$, $u \leq 1$, $u \geq 0.5$, vilket tillsammans ger $0.5 \leq u \leq 1$.

2c: Vi vill nu att minimering av $(3u-1)x_1 + (4u-2)x_2 + (3u-3)x_3 + (4u-2)x_4$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$. Detta kräver att $(3u-1) \geq 0$, $(4u-2) \geq 0$,$(3u-3) \leq 0$, $(4u-2) \leq 0$, dvs. $u \geq 1/3$, $u \geq 0.5$, $u \leq 1$, $u \leq 0.5$, vilket tillsammans ger $u = 0.5$. Så ja, det finns ett sådant u, men lösningen blir aldrig unik, eftersom x_2 och x_4 är precis lika bra. För $u = 0.5$ kan subproblemet ge båda, en av dem eller ingen av dem lika med ett. Vi har inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -x_1^{(l)} - 2x_2^{(l)} - 3x_3^{(l)} - 2x_4^{(l)} + u_1(3x_1^{(l)} + 4x_2^{(l)} + 3x_3^{(l)} + 4x_4^{(l)} - 8) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: $\bar{u} = 0$ gav punkten (1, 1, 1, 1), som ger snitt: $q \leq 6u - 8$.
$\bar{u} = 0.4$ gav punkten (0, 1, 1, 1), som ger snitt: $q \leq 3u - 7$.
$\bar{u} = 0.6$ gav punkten (0, 0, 1, 0), som ger snitt: $q \leq -5u - 3$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{lll} v_{DM} = \max & q & \\ \text{då} & q \leq & 6u - 8 \\ & q \leq & 3u - 7 \\ & q \leq & -5u - 3 \\ & u \geq 0 & \end{array}$$

Grafisk lösning ger optimum i skärningen av andra och tredje snittet, $u = 0.5$ och $q = -5.5$. Bästa gränser nu: $-5.8 \leq v^* \leq -5.5$.

3c: $\bar{u} = 0.5$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min 0.5x_1 - 1.5x_3 - 4$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (ej unik), $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ (ej unik), och $\varphi(\bar{u}) = -5.5$, vilket ger en bättre undre gräns. Bästa gränser nu: $-5.5 \leq v^* \leq -5.5$, vilket indikerar optimum. Snittet blir samma som tidigare (snitt 2 eller 3).

3d: LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -8\lambda_1 - 7\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \text{då} & -6\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger $\lambda_1 = 0$ (eftersom motsvarande bivillkor inte är aktivt) samt $-3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$ (eftersom $u > 0$). Tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ger detta $\lambda_2 = 5/8$ och $\lambda_3 = 3/8$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} = 5/8(0, 1, 1, 1) + 3/8(0, 0, 1, 0) = (0, 3/8, 1, 3/8)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{llrcrcr} \psi(\bar{y}) = & \min & -5x_1 & - & 3x_2 & + & f(\bar{y}) \\ \text{då} & & -x_1 & - & x_2 & \geq & -3\bar{y} \\ & & -x_1 & + & x_2 & \geq & -\bar{y} \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{lrcl} \psi(\bar{y}) = \max & \multicolumn{3}{l}{(-3\bar{y})u_1 + (-\bar{y})u_2 + f(\bar{y})} \\ \text{då} & -u_1 - u_2 & \leq & -5 \\ & -u_1 + u_2 & \leq & -3 \\ & u_1, u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (-3y)u_1^{(l)} + (-y)u_2^{(l)} + f(y) \;\; \text{för alla } l \\ & y \in \{0, 1, 2\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = 0$: Målfunktionen konstant, alla tillåtna lösningar lika bra. Jag väljer $u_1 = 5$, $u_2 = 0$, med $\psi(0) = 0$. Benderssnittet blir $q \geq -3y$.

För $\bar{y} = 1$: max $-3u_1 - u_2 + 12$ ger $u_1 = 4$, $u_2 = 1$, med $\psi(1) = -1$. Benderssnittet blir $q \geq -y$.

För $\bar{y} = 2$: max $-6u_1 - 2u_2 + 24$ ger $u_1 = 4$, $u_2 = 1$, med $\psi(2) = -2$. Benderssnittet blir $q \geq -y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -3y \\ & q \geq -y \\ & y \in \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 3$ med $q = -3$. Vi har nu $-3 \leq v^* \leq -2$.

För $\bar{y} = 3$: $\psi(\bar{y}) = \max -9u_1 - 3u_2 + 36$ ger $u_1 = 4$, $u_2 = 1$, med $\psi(3) = -3$. Benderssnittet blir $q \geq -y$.

Vi har nu $-3 \leq v^* \leq -3$, vilket indikerar optimum.

Komplementaritet för subproblemet ger $x_1 = 6$, $x_2 = 3$.

Den bästa funna tillåtna lösningen är alltså $y = 3$, med $x_1 = 6$ och $x_2 = 3$, och detta är optimum. Svar i ord: Chartra tre bussar.

4c: Grafiskt ser vi att det duala tillåtna området endast har två extrempunkter, vilket betyder att det bara finns två Benderssnitt.

4d: Komplikationen dyker endast upp i masterproblemet. En konvex funktion kan modelleras med hjälp av flera snitt, liknande Benderssnitten. Ersätt termen $12y$ i masterproblemet med q_2 då $q_2 \geq 5y$, $q_2 \geq 10y - 5$, $q_2 \geq 20y - 25$. Det blir alltså inte speciellt mycket svårare.

Uppgift 5 (kortfattat)

Lösningstiden ökar mycket snabbare än linjärt för stora problem, och 1000 butiker tog ju ganska länge, så 10000 butiker tar nog alldeles för lång tid.

Lagrangerelaxation: Relaxera bivillkor så att problemet separerar i ett problem per butik. Klarar heltaliga variabler. Nackdel: Många bivillkor måste relaxeras, ger många multiplikatorer som måste bestämmas.

Dantzig-Wolfedekomposition: Inte bra p.g.a. heltalsvariabler. Om målet bara är att lösa LP-relaxationen, kan det kanske vara en bra metod.

Bendersdekomposition: Fixera samtliga binära variabler. (Subproblemet måste nämligen vara linjärt.) Subproblemet blir ett LP-problem, som går snabbare att lösa. Nackdel: Många heltalsvariabler ger ett stort och svårt masterproblem.

Uppgift 6 (kortfattat)

Dåligt väder, trafikstockningar, olyckor, okända vägarbeten, etc. kan leda till köer eller omvägar. Allt detta kan göra att det går åt mer batteri än planerat, och att vissa sträckor kostar mer än planerat. Det besvärliga är att batteriet kan ta slut för fort, vilket kan leda till "stupid driver" sista biten. När man kört en sträcka, vet man ju hur mycket laddning man har kvar. Om det skulle vara betydligt mindre än planerat, behöver man lösa om problemet från den punkt man är, med aktuell laddning som startladdning, vilket är fullt möjligt.

Svårare är att i förväg försöka ta hänsyn till dessa störningar. Man får nog acceptera att vara reaktiv snarare än proaktiv.

Uppgift 7 (kortfattat)

För vanliga tåg är likheterna ganska stora. En utbyggnad av en trång sektor kan ge bättre flöde på många ställen. Frågan är dock om den linjära flödesmodellen är vettig. Man vill troligen minimera förseningar, vilket kanske ger en annorlunda målfunktion.

För höghastighetsjärnväg handlar det nog om större paket av utbyggnader som göra alla eller ingen. I princip bör nog modellen fungera även då.

Här måste man nog ta hänsyn till situationen under tiden utbyggnaden pågår, eftersom det kan ta lång tid.

Uppgift 8 (kortfattat)

Alla problem har gemensamt att det handlar om ett eller flera fordon som kör i cykler och som kan använda gator för transport.

Metoden fungerar nog bra för sophämtning, eftersom "efterfrågan" är konstant, så fasta rutter kan vara bra. Eftersom man nog inte vill ta en halv gata, kan man ju enkelt räkna ut hur lång tid varje gata tar. Förenklingarna är nog mindre allvarliga än för snöröjning.

Detsamma gäller för upptagning av sand.

När det gäller leverans av varor, kommer (sannolikt) efterfrågan att variera, så man måste lösa om problemet varje gång. Å andra sidan är nog antalet fordon ganska litet. Om väldigt få beställer, handlar det mer om att åka till vissa punkter än att täcka vissa gator. Det ger ett ganska annorlunda problem (mer av handelsresandetyp).