Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2016-08-23

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om Bertil köper sak j, 0 om inte.

max $z = 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 5x_4$
då $10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 3x_4 \leq 25$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4$,

1b: Indata: c_k : nytta, a_k : kostnad.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = den vikt (kg) som får användas till de k första sakerna.
Styrning: $x_k = 1$ om Bertil köper sak k, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 25$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_4 = 25$. $f_0(s_0) = 0$.

1c: Bivillkoret blir $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5$
Vi får nu $0 \leq s_k \leq 5$ för alla k och $s_4 = 5$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	20	20	20	20
$f_1(s_1)$	0	0	20	20	20	20
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	20	20	20	20
1	-	-	-	-	15	15
$f_2(s_2)$	0	0	20	20	20	20
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	0	0

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	20	20	20	20
1	-	-	10	10	30	30
$f_3(s_3)$	0	0	20	20	30	30
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	20	20	30	30
1	-	5	5	25	25	35
$f_4(s_4)$	0	5	20	25	30	35
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	0	1	0	1

Uppnystning: $s_4 = 5$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 0$, $s_1 = 2$, $x_1 = 1$, $s_0 = 1$.
$z = 35$.
Svar i ord: Köp föremål 1, 3 och 4, dvs. gitarr, tomte och fat. Totalt värde: 35.

Kontrollera lösningen i ursprungliga bivillkoret: $10 + 10 + 3 = 23 \leq 25$, ja, den är tillåten.

Uppgift 2

min $z = -20x_1 - 15x_2 - 10x_3 - 5x_4$
då $10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 3x_4 \leq 25$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4$,

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -20x_1 - 15x_2 - 10x_3 - 5x_4 + u(10x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 3x_4 - 25) =$
$(10u - 20)x_1 + (20u - 15)x_2 + (10u - 10)x_3 + (3u - 5)x_4 - 25u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

$\bar{u} = 0.7$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -13x_1 - x_2 - 3x_3 - 2.9x_4 - 17.5$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -37.4$, vilket ger $\underline{v} = -37.4$. Subgradient: $\xi = 18 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 1.0$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -10x_1 + 5x_2 - 2x_4 - 25$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -37$, vilket ger $\underline{v} = -37$. Subgradient: $\xi = -12 < 0$. Lösningen tillåten, och vi får $\bar{v} = -25$.

(Man kan även välja $x_3 = 1$, vilket ger samma undre gräns, men subgradient $\xi = -2 < 0$, vilket ger en tillåten lösning och $\bar{v} = -35$.)

Bästa gränser: $-37 \leq v^* \leq -25$. Vi vet inte om vi har funnit optimum.

2b: Vi vill alltså att minimering av $(10u-20)x_1+(20u-15)x_2+(10u-10)x_3+(3u-5)x_4$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$. Detta kräver att $(10u - 20) \leq 0$, $(20u - 15) \geq 0$, $(10u - 10) \leq 0$, och $(3u - 5) \leq 0$, dvs. $u \leq 2$, $u \geq 0.75$, $u \leq 1$ och $u \leq 1.66667$, vilket tillsammans ger $0.75 \leq u \leq 1$. För värden i det inre av det intervallet, t.ex. $u = 0.8$, fås styrbarhet, dvs. korrekt optimallösning fås säkert.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$
\begin{array}{ll}
\max & q \\
\text{då} & q \leq -20x_1^{(l)} - 15x_2^{(l)} - 10x_3^{(l)} - 5x_4^{(l)} + u(10x_1^{(l)} + 20x_2^{(l)} + 10x_3^{(l)} + 3x_4^{(l)} - 25) \ \text{ för alla } l \\
& u \geq 0
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: $\bar{u} = 0.7$ gav punkten (1, 1, 1, 1), som ger snitt: $q \leq 18u - 50$.
$\bar{u} = 1.0$ gav punkten (1, 0, 0, 1), som ger snitt: $q \leq -12u - 25$.
($\bar{u} = 1.0$ kan även ge punkten (1, 0, 1, 1), som ger snitt: $q \leq -2u - 35$.)

Masterproblemet blir då

$$
\begin{aligned}
v_{DM} = \max \quad & q \\
\text{då} \quad & q \leq 18u - 50 \\
& q \leq -12u - 25 \\
& u \geq 0
\end{aligned}
$$

Grafisk lösning ger optimum i skärningen av snitten, $u = 5/6 \approx 0.83333$ och $q = -35$. Bästa gränser nu: $-37 \leq v^* \leq -35$.

(Om vi istället valde (1, 0, 1, 1) i $\bar{u} = 1.0$, har vi snitt $q \leq -2u - 35$, och optimum blir $u = 0.75$ och $q = -36.5$, vilket ger gränserna $-37 \leq v^* \leq -36.5$.)

$\bar{u} = 0.833$ ger
$\varphi(\bar{u}) = \min -11.67x_1 + 1.67x_2 - 1.67x_3 - 2.5x_4 - 20.83$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -36.67$, vilket ger $\underline{v} = -36.67$. Subgradient: $\xi = -2 < 0$. Bästa gränser nu: $-36.67 \leq v^* \leq -35$. Snittet blir $q \leq -2u - 35$.

Masterproblemet blir nu

$$
\begin{aligned}
v_{DM} = \max \quad & q \\
\text{då} \quad & q \leq 18u - 50 \\
& q \leq -12u - 25 \\
& q \leq -2u - 35 \\
& u \geq 0
\end{aligned}
$$

Grafisk lösning ger optimum i skärningen av snitt 1 och 3, $u = 0.75$ och $q = -36.5$, vilket ger gränserna $-36.67 \leq v^* \leq -36.5$.

3c: $\bar{u} = 0.75$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -12.5x_1 - 2.5x_3 - 2.75x_4 - 18.75$ då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -36.5$, vilket ger $\underline{v} = -36.5$. Bästa gränser nu: $-36.5 \leq v^* \leq -36.5$. Vi har nu funnit optimum. Lösningen var samma som förra iterationen, så inget nytt snitt fås.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$
\begin{aligned}
v_{DM} = \min \quad & -50\lambda_1 - 25\lambda_2 - 35\lambda_3 \\
\text{då} \quad & -18\lambda_1 + 12\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Komplementaritet ger $\lambda_2 = 0$ (eftersom motsvarande bivillkor inte är aktivt) samt $-18\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$ (eftersom $u > 0$). Tillsammans med $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$ ger detta $\lambda_1 = 0.1$ och $\lambda_3 = 0.9$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_3 x^{(3)} = 0.1(1, 1, 1, 1) + 0.9(1, 0, 1, 1) = (1, 0.1, 1, 1)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{llrcrcrcll}
\psi(\bar{y}) = & \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 20\bar{y}_1 + 10\bar{y}_2 + 6\bar{y}_3 & \\
\text{då} & & x_1 & & & & & \leq & 10\bar{y}_1 & (1) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 6\bar{y}_2 & (2) \\
& & & & & & x_3 & \leq & 2\bar{y}_3 & (3) \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 15 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{lll}
\psi(\bar{y}) = \max & \multicolumn{2}{l}{-10\bar{y}_1 u_1 - 6\bar{y}_2 u_2 - 2\bar{y}_3 u_3 + 15u_4 + 20\bar{y}_1 + 10\bar{y}_2 + 6\bar{y}_3} \\
\quad\text{då} & -u_1 + u_4 & \leq \; 2 \\
& -u_2 + u_4 & \leq \; 3 \\
& -u_3 + u_4 & \leq \; 5 \\
& u_1, u_2, u_3, u_4 & \geq \; 0
\end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (20 - 10u_1^{(l)})y_1(10 - 6u_2^{(l)})y_2(6 - 2u_3^{(l)})y_3 + 15u_4^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0, \text{ heltal}
\end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: Vi får följande Benderssnitt:
A: $x = (15, 0, 0)$, $z = 70$, $u = (0, 0, 0, 2)$, snitt: $q \geq 20y_1 + 10y_2 + 6y_3 + 30$.
B: $x = (0, 15, 0)$, $z = 75$, $u = (1, 0, 0, 3)$, snitt: $q \geq 10y_1 + 10y_2 + 6y_3 + 45$.
C: $x = (0, 0, 15)$, $z = 123$, $u = (3, 2, 0, 5)$, snitt: $q \geq -10y_1 - 2y_2 + 6y_3 + 75$.

Bästa övre gräns: $\bar{v} = 70$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq 20y_1 + 10y_2 + 6y_3 + 30 \\
& q \geq 10y_1 + 10y_2 + 6y_3 + 45 \\
& q \geq -10y_1 - 2y_2 + 6y_3 + 75 \\
& 10y_1 + 6y_2 + 3y_3 \geq 15 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0, \text{ heltal}
\end{array}$$

Lösningen $y = (1, 1, 0)$ ger i snitten $q \geq 60$, $q \geq 65$ och $q \geq 63$, samt uppfyller fjärde bivillkoret, så vi får $q = 65$, vilket ger $\underline{v} = 65$. Vi har nu $65 \leq v^* \leq 70$.

För $\bar{y} = (1, 1, 0)$: I primalen av subproblemet får vi $x_1 \leq 10$, $x_2 \leq 6$, $x_3 = 0$, samt $x_1 + x_2 \geq 15$, vilket ger att $x_1 = 10$ och $x_2 = 5$, eftersom x_1 är bättre än x_2. Vi får $\psi(\bar{y}) = 65$.

I dualen fås

$$\begin{array}{rrcl} \psi(\bar{y}) = \max & -10u_1 - 6u_2 + 15u_4 + 30 & & \\ \text{då} & -u_1 + u_4 & \leq & 2 \\ & -u_2 + u_4 & \leq & 3 \\ & -u_3 + u_4 & \leq & 5 \\ & u_1, u_2, u_3, u_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger $u_1 = u_4 - 2$ och $u_2 = u_4 - 3$, så den duala målfunktionen blir $\psi(\bar{y}) = \max -10(u_4 - 2) - 6(u_4 - 3) + 15u_4 + 30 = -10u_4 + 20 - 6u_4 + 18 + 15u_4 + 30 = -u_4 + 68$, så vi vill minimera u_4. Dock har vi $u_4 = u_2 + 3 \geq 3$, ty $u_2 \geq 0$, så vi sätter $u_4 = 3$, vilket ger $u_1 = 1$ och $u_2 = 0$ (samt $u_3 = 0$).

Vi får alltså $x = (10, 5, 0)$, $z = 65$, $u = (1, 0, 0, 3)$, vilket ger $\bar{v} = 65$. Vi har nu $65 \leq v^* \leq 65$, så optimum är funnet.

Den bästa lösningen är alltså $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$. Svar i ord: Hyr en lastbil och en skåpbil, lasta lastbilen full och ta resten i skåpbilen.

Uppgift 5 - 8

Se projektinformationerna, samt lösningar till tidigare tentor.