Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2017-01-11

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om instrument j tas med, 0 om inte.

max $z = 16x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 10x_6 + 4x_7 + 6x_8$
då $50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 20x_6 + 10x_7 + 30x_8 \leq 100$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Bivillkoret kan skrivas $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + 3x_8 \leq 10$ utan att det tillåtna området ändras.

1b: Indata: c_k : nytta, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ den vikt (kg) som får användas till de k första instrumenten.
Styrning: $x_k = 1$ om instrument k tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 100$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_8 = 100$. $f_0(s_0) = 0$.

Om vi räknar s_k i enheter om 10kg, blir $0 \leq s_k \leq 10$ för alla k. $s_8 = 10$.

1c: De tre sista instrumenten tas med (x_j sätts till 1), så problemet blir

max $z = 16x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 20$
då $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 4$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

(Bivillkoret tillåter inte $x_1 = 1$, så vi kan fixera $x_1 = 0$, dvs. ta bort x_1 från problemet. Jag gör dock inte det här, för att visa att det går bra ändå i dynamisk programmering.)

Jag tar med en extra kolumn för $s_k = 5$ för uppgift d. I uppgift c får den ej användas.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	-	-	16
$f_1(s_1)$	0	0	0	0	0	16
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	0	0	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	16
1	-	-	-	5	5	5
$f_2(s_2)$	0	0	0	5	5	16
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	1	1	0

Iteration 3:

$x_3 \diagdown s_3$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	5	5	16
1	-	-	5	5	5	10
$f_3(s_3)$	0	0	5	5	5	16
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	1	1	0

Iteration 4:

$x_4 \diagdown s_4$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	5	5	5	16
1	-	3	3	8	8	8
$f_4(s_4)$	0	3	5	8	8	16
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	0	1	1	0

Iteration 5:

$x_5 \diagdown s_5$	0	1	2	3	4	5
0	0	3	5	8	8	16
1	-	-	4	7	9	12
$f_5(s_5)$	0	3	5	8	9	16
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	1	0

Uppnystning: $s_5 = 4$, $x_5 = 1$, $s_4 = 2$, $x_4 = 0$, $s_3 = 2$, $x_3 = 1$, $s_2 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 1$. $z = 9$.
Svar i ord: Ta med instrument 3 och 5, dvs. fluxgatemagnetometer och ultraviolett spektrograf. Total nytta: 9.

1d: Använd kolumnen med $s_k = 5$ ovan. Nysta upp: $s_5 = 5$, $x_5 = 0$, $s_4 = 5$, $x_4 = 0$, $s_3 = 5$, $x_3 = 0$, $s_2 = 5$, $x_2 = 0$, $s_1 = 5$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 16$.
Svar i ord: Ta bara med instrument 1, dvs. jonspektrometern. Total nytta: 16.

Uppgift 2

Här är det viktigt att ta bort x_1 från problemet, se uppgift c.

min $z = -5x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 4x_5$
då $3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \le 4$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 2, 3, 4, 5$

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -5x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 4x_5 + u(3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - 4) =$
$(3u - 5)x_2 + (2u - 5)x_3 + (u - 3)x_4 + (2u - 4)x_5 - 4u$
då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

$\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -5x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 4x_5$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -17$, vilket ger $\underline{v} = -17$. Subgradient: $\xi = 4 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min x_2 - x_3 - x_4 - 8$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ eller 1, och $\varphi(\bar{u}) = -10$, vilket ger $\underline{v} = -10$.

Om vi väljer $x_5 = 0$ fås subgradient $\xi = -1 < 0$, lösningen tillåten, och $\bar{v} = -8$.

Om vi väljer $x_5 = 1$ fås subgradient $\xi = 1 > 0$, lösningen otillåten.

$\bar{u} = 3$ ger $\varphi(3) = \min 4x_2 + x_3 + 2x_5 - 12$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ eller 1, $x_5 = 0$, och $\varphi(\bar{u}) = -12$, vilket inte ger en bättre undre gräns.

Om vi väljer $x_4 = 0$ fås subgradient $\xi = -4 < 0$, lösningen tillåten, men ingen bättre övre gräns.

Om vi väljer $x_4 = 1$ fås subgradient $\xi = -3 < 0$, lösningen tillåten, men ingen bättre övre gräns.

Bästa gränser: $-10 \leq v^* \leq -8$. Gränserna visar inte huruvida vi har funnit optimum.

Dock har vi både en positiv och en negativ subgradient för $u = 2$, vilket visar att det är maximum.

2b: Vi vill alltså att minimering av $(3u-5)x_2 + (2u-5)x_3 + (u-3)x_4 + (2u-4)x_5$ ska ge lösningen $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Detta kräver att $(3u-5) \geq 0$, $(2u-5) \leq 0$, $(u-3) \geq 0$, och $(2u-4) \leq 0$, dvs. $u \geq 5/3$, $u \leq 2.5$, $u \geq 3$ och $u \leq 2$, vilket saknar lösning (ty $2 < 3$). Vi har alltså inte styrbarhet.

2c: Om vi inte tog bort x_1 tillkom termen $(5u-16)x_1$ i Lagrangefunktionen. För alla de värden på u vi prövat ger detta $x_1 = 1$. För att få $x_1 = 0$ krävs $u \geq 16/5$, men för så stora u blir $x_j = 0$ för alla j. M.a.o. så kommer vi aldrig att få en tillåten lösning (förutom att inte ta med något alls). Det vore alltså mycket dumt att inte rensa bort sådana variabler.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -5x_2^{(l)} - 5x_3^{(l)} - 3x_4^{(l)} - 4x_5^{(l)} + u(3x_2^{(l)} + 2x_3^{(l)} + x_4^{(l)} + 2x_5^{(l)} - 4) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: $\bar{u} = 0$ gav punkten (1, 1, 1, 1), som ger snitt: $q \leq 4u - 17$.
$\bar{u} = 2$ gav punkten (0, 1, 1, 1), som ger snitt: $q \leq u - 12$
och punkten (0, 1, 1, 0), som ger snitt: $q \leq -u - 8$
$\bar{u} = 3$ gav punkten (0, 0, 1, 0), som ger snitt: $q \leq -3u - 3$
och punkten (0, 0, 0, 0), som ger snitt: $q \leq -4u$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{rlll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & 4u - 17 & (1) \\ & q \leq & u - 12 & (2) \\ & q \leq & -u - 8 & (3) \\ & q \leq & -3u - 3 & (4) \\ & q \leq & -4u & (5) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

Grafisk lösning ger optimum i skärningen av snitten 2 och 3, $u = 2$ och $q = -10$. Bästa gränser nu: $-10 \leq v^* \leq -10$, så vi har funnit optimum.

3c: LP-dualen av masterproblemet blir

$$
\begin{array}{ll}
v_{DM} = \min & -17\lambda_1 - 12\lambda_2 - 8\lambda_3 - 3\lambda_4 \\
\text{då} & -4\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 + 4\lambda_5 \geq 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0
\end{array}
$$

Komplementaritet ger $\lambda_1 = 0$, $\lambda_4 = 0$ och $\lambda_5 = 0$ (eftersom motsvarande snitt inte är aktiva) samt $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (eftersom $u > 0$). Tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ger detta $\lambda_2 = 0.5$ och $\lambda_3 = 0.5$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} = 0.5(0,1,1,1) + 0.5(0,1,1,0) = (0,1,1,0.5)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcll}
\psi(\bar{y}) = & \min & -2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 20\bar{y} & \\
& \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & \leq & 10\bar{y} & (1) \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{rrcr}
\psi(\bar{y}) = \max & -10\bar{y}_1 u_1 - 8u_2 + 20\bar{y}_1 & & \\
\text{då} & -2u_1 - u_2 & \leq & -2 \\
& -u_1 - u_2 & \leq & -3 \\
& -5u_1 - u_2 & \leq & -4 \\
& u_1, u_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas $U = \{u \geq 0 : 2u_1 + u_2 \geq 2, u_1 + u_2 \geq 3, 5u_1 + u_2 \geq 4\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (20 - 10u_1^{(l)})y - 8u_2^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y \in \{0,1,2,3\}
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = 0$: $\psi(0) = \max -8u_2$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 3$, $u_2 = 0$, med med $\psi(0) = 0$, vilket ger $\bar{v} = 0$. Benderssnittet blir $q \geq -10y$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -10y \\ & y \in \{0,1,2,3\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 3$ med $q = -30$. Vi har nu $-30 \leq v^* \leq 0$.

För $\bar{y} = 3$: $\psi(3) = \max -30u_1 - 8u_2 + 60$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 0.25$, $u_2 = 2.75$, med med $\psi(3) = 30.5$, vilket inte förbättrar övre gränsen. Benderssnittet blir $q \geq 17.5y - 22$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -10y \\ & q \geq 17.5y - 22 \\ & y \in \{0,1,2,3\} \end{array}$$

Grafisk lösning ger nu att den bästa heltalslösningen är $y = 1$ med $q = -4.5$. Vi har nu $-4.5 \leq v^* \leq 0$.

För $\bar{y} = 1$: $\psi(1) = \max -10u_1 - 8u_2 + 20$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 0.25$, $u_2 = 2.75$, med med $\psi(3) = -4.5$, vilket ger $\bar{v} = -4.5$. Vi har nu $-4.5 \leq v^* \leq -4.5$, vilket indikerar optimum.

I subproblemet noterar vi att första bivillkoret inte är aktivt, vilket ger $x_1 = 0$. Eftersom $u_1 > 0$ och $u_2 > 0$, har vi $x_2 + 5x_3 = 10$ och $x_2 + x_3 = 8$, vilket ger $x_2 = 7.5$ och $x_3 = 0.5$.

Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 0$, $x_2 = 7.5$, $x_3 = 0.5$ och $y_1 = 1$. Svar i ord: Välj utbyggnadsalternativ 1, vilket möjliggör 7.5 uppskjutningar i medel per år av satellittyp 2 och 0.5 av typ 3.

4c: Utan heltalskrav på y får vi samma lösningsgång fram till andra masterproblemet, då vi fick $y = 1$. Nu får vi istället optimum precis i skärningen mellan snitt 2 och 3, vilket ger $y = 0.8$, och $q = -8$, vilket ger $-8 \leq v^* \leq 0$.

För $\bar{y} = 0.8$: $\psi(0.8) = \max -8u_1 - 8u_2 + 16$ då $u \in U$.
Lösningen är nu inte unik, men $u_1 = 0.25$, $u_2 = 2.75$ är optimal, med med $\psi(3) = -8$, vilket ger $\bar{v} = -8$. Vi har nu $-8 \leq v^* \leq -8$, vilket indikerar optimum.

I subproblemet är det första bivillkoret inte aktivt, vilket ger $x_1 = 0$. Eftersom $u_1 > 0$ och $u_2 > 0$, har vi $x_2 + 5x_3 = 8$ och $x_2 + x_3 = 8$, vilket ger $x_2 = 8$ och $x_3 = 0$. Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 0$ och $y_1 = 0.8$.

Uppgift 5 (kortfattat)

5a: Antal butiker är mycket större än 1000. GLPK klarar inte av så stora problem på rimlig tid. Lagrangerelaxation som ger separabilitet vore kanske en möjlighet, men innehåller många relaxerade bivillkor, dvs. många multiplikatorer att finna värden på. Bendersdekomposition där man i subproblemet fixerar alla binära variabler kan var en god ide, om subproblemet kan lösas. Möjligtvis skulle man ersätta masterproblemet med någon heuristik, eftersom det kan vara för svårt.

5b: Andra och fler omvandlingsfaktorer, fler möjligheter att köpa och sälja olika saker (tomförpackningar, fulla förpackningar mm), dvs. mer interaktion med det omgivande samhället, samt olika straffkostnader på olika hantering, är exempel på utvidgningar som inte gör modellen mycket svårare att lösa.

Flera varusorter (glas, metall) skulle fördubbla den linjära delen av modellen. Kanske hanterbart.

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: Man skulle då behöva hålla reda på föregående inställning (styrning), vilket inte finns i varken modellen eller definitionerna i dynamisk programmering. Man behöver ett nytt tillstånd, nämligen inställningen i steg k, nu finns bara batterinivån. Samtliga kombinationer av de två tillstånden måste undersökas. Om man har fyra olika inställningar, blir tabellerna fyra gånger så stora.

6b: Laddning kan ses som ett speciellt vägavsnitt, där man har två alternativ, ladda eller inte ladda, som har speciellt uträknade kostnader/tider och ökning av batterinivån. Om man kan tänka sig partiell laddning, fås flera alternativ.

Att bestämma i förväg var och om laddning ska ske är sämre. Om man gör så, kan man lösa problemen mellan laddningarna som separata problem.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: Tre storlekar kan modelleras genom en heltalsvariabel som kan anta tre olika värden, eller tre binära variabler vars summa är högst ett. Detta leder till ett större, svårare masterproblem, medan subproblemet inte blir svårare alls. Man bör även förvänta sig att fler iterationer behövs. Om antalet möjliga utbyggnadsplatser fortfarande är rimligt lågt, bör Bendersdekomposition fortfarande vara en bra metod.

7b: Modellen blir ungefär densamma. Man kan välja mellan att låta $y = 1$ betyda att ledningen tas bort, eller att den är kvar. Skillnaden är att kostnader och kapaciteter som i ena fallet kopplas till y i andra fallet får kopplas till $1 - y$.

Uppgift 8 (kortfattat)

8a: Inför en fiktiv väg, som motsvarar startpunkten, och tvinga alla fordonen att röja den.

8b: Det går i princip att använda samma metodik, men turerna måste hänga ihop, dvs. nästa tur måste börja där föregående slutar, vilket kan fixas som i uppgift a. Dock vore det kanske bättre att låta fordonen byta turer med varandra, för att minska skillnaderna i tid.

8c: Betrakta helt enkelt två fordon som en enhet. Det är då inte möjligt att byta "partner", men det är tveksamt om ett byte skulle ge en bättre lösning.

8d: Det finns färre korsningar på landsväg, så problemet är nog lättare att lösa. F.ö. är nog problemen väldigt lika.