Tekniska Högskolan i Linköping — Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen — Lösning till tentamen
Optimeringslära — 2017-04-19
Kaj Holmberg

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om beställning j accepteras, 0 om inte.

$\max z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5$
då $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 5$
$3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 12x_5 \leq 20$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Indata: c_k: vinst, a_k: antal vagnar. Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ det antal vagnar som får användas till de k första beställningarna.
Styrning: $x_k = 1$ om beställning k accepteras, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 5$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 5$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	-	3	3	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	3	3	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5
0	0	3	3	3	3	3
1	-	-	-	7	10	10
$f_2(s_2)$	0	3	3	7	10	10
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5
0	0	3	3	7	10	10
1	-	-	5	8	8	12
$f_3(s_3)$	0	3	5	8	10	12
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	1	0	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5
0	0	3	5	8	10	12
1	-	-	4	7	9	12
$f_4(s_4)$	0	3	5	8	10	12
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5
0	0	3	5	8	10	12
1	-	-	-	-	9	12
$f_5(s_5)$	0	3	5	8	10	12
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0

Uppnystning: $s_5 = 5$, $x_5 = 0$, $s_4 = 5$, $x_4 = 0$, $s_3 = 5$, $x_3 = 1$, $s_2 = 3$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 12$.
Svar i ord: Acceptera beställning 2 och 3. (Lösningen är inte unik.) Total vinst: 12.

1d: Vikten för lösningen blir 17, vilket är mindre än 20, så lösningen är tillåten, och därför också optimal.

Uppgift 2

min $z = -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 9x_5$
då $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 5$
$3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 12x_5 \leq 20$
$x_j \in \{0,1\}$ för $j = 1,2,3,4,5$

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 9x_5 + u_1(x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 5) + u_2(3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 12x_5 - 20) =$
$(u_1 + 3u_2 - 3)x_1 + (3u_1 + 10u_2 - 7)x_2 + (2u_1 + 7u_2 - 5)x_3 + (2u_1 + 6u_2 - 4)x_4 + (4u_1 + 12u_2 - 9)x_5 - 5u_1 - 20u_2$ då $x_j \in \{0,1\}$ för $j = 1,2,3,4,5$

Subproblemet är separabelt i ett problem för varje variabel, och löses genom att beräkna målfunktionskoefficienten för varje variabel och sätta variabeln till 1 om koefficienten är negativ, och 0 om koefficienten är positiv. Om koefficienten är noll, kan variabeln sättas till valfritt värde av 0 och 1.

En subgradient fås genom att sätta in subproblemlösningen i de relaxerade bivillkoren.
$\xi = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 5 \\ 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 12ax_5 - 20 \end{pmatrix}$

2b: $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (2,0)$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -x_1 - x_2 - x_3 - x_5$ då $x_j \in \{0,1\}$ för $j = 1,2,3,4,5$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, x_4 valfri, $x_5 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -14$, vilket ger $\underline{v} = -14$. Jag väljer $x_4 = 0$. Subgradient: $\xi = (5, 12)$. Lösningen ej tillåten.

$(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (3,0)$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$ då $x_j \in \{0,1\}$ för $j = 1,2,3,4,5$, vilket har lösningen x_1 valfri, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(\bar{u}) = -15$, vilket inte förbättrar $\underline{v}$. Jag väljer $x_1 = 1$. Subgradient: $\xi = (-4, -17)$. Lösningen är tillåten och ger $\bar{v} = -3$.

$(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (1, 1.5)$ ger $\varphi(\bar{u}) = \min -0.5x_1 + x_2 + 0.5x_3 + x_4 + x_5$ då $x_j \in \{0,1\}$ för $j = 1,2,3,4,5$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(\bar{u}) = -15.5$, vilket inte förbättrar $\underline{v}$. Subgradient: $\xi = (-4, -17)$. Lösningen är tillåten men förbättrar inte $\bar{v}$.

Bästa gränser: $-14 \leq v^* \leq -3$. Gränserna visar inte huruvida vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(u_1 + 3u_2 - 3)x_1 + (3u_1 + 10u_2 - 7)x_2 + (2u_1 + 7u_2 - 5)x_3 + (2u_1 + 6u_2 - 4)x_4 + (4u_1 + 12u_2 - 9)x_5 - 5u_1 - 20u_2$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Detta kräver att $(u_1 + 3u_2 - 3) \geq 0$, $(3u_1 + 10u_2 - 7) \leq 0$, $(2u_1 + 7u_2 - 5) \leq 0$, $(2u_1 + 6u_2 - 4) \geq 0$, $(4u_1 + 12u_2 - 9) \geq 0$, dvs. $u_1 + 3u_2 \geq 3$, $3u_1 + 10u_2 \leq 7$, $2u_1 + 7u_2 \leq 5$, $2u_1 + 6u_2 \geq 4$, $4u_1 + 12u_2 \geq 9$, vilket saknar lösning. Man kan se det grafiskt, men också genom studera $3u_1 + 10u_2 \leq 7$ och $u_1 + 3u_2 \geq 3$. $3u_1 + 10u_2 = 2(u_1 + 3u_2) + u_1 + 4u_2 \geq 6 + u_1 + 4u_2 \geq 9$ (eftersom $u \geq 0$), vilket ger en motsägelse.

2d: Om det andra bivillkoret är uppfyllt för alla lösningar som uppfyller det första, behövs inte det andra, och vi kan fixera u_2 till 0.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes i uppgift 2 (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{lll} \max & q & \\ \text{då} & q \leq & -3x_1^{(l)} - 7x_2^{(l)} - 5x_3^{(l)} - 4x_4^{(l)} - 9x_5^{(l)} \\ & & +u_1(x_1^{(l)} + 3x_2^{(l)} + 2x_3^{(l)} + 2x_4^{(l)} + 4x_5^{(l)} - 5) \\ & & +u_2(3x_1^{(l)} + 10x_2^{(l)} + 7x_3^{(l)} + 6x_4^{(l)} + 12x_5^{(l)} - 20) \;\text{ för alla } l \\ & u \geq & 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (0, 1, 1, 0, 0) ger snitt: $q \leq -3u_2 - 12$.
Punkten (1, 1, 1, 0, 0) ger snitt: $q \leq u_1 - 15$.
Punkten (1, 1, 1, 0, 1) ger snitt: $q \leq 5u_1 + 12u_2 - 24$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{llll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & -3u_2 - 12 & (1) \\ & q \leq & u_1 - 15 & (2) \\ & q \leq & 5u_1 + 12u_2 - 24 & (3) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

Optimum anges vara i $(u_1, u_2) = (3, 0)$. Stoppa in denna punkt i snitten, vilket ger $q \leq -12$, $q \leq -12$, $q \leq -9$, så vi får $v_{DM} = q = -12$, vilket ger $\bar{v} = -12$. De två första snitten är aktiva.

Lös nu subproblemet i $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (3, 0)$ (redan gjort i uppgift 2). Vi får lösningen x_1 valfri, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(\bar{u}) = -15$. Jag väljer $x_1 = 1$, och punkten (1, 0, 0, 0, 0) ger snitt $q \leq -4u_1 - 17u_2 - 3$.

$(u_1, u_2) = (3, 0)$ i detta snitt ger $q \leq -15$, så antingen är denna punkt inte optimal i masterproblemet, eller så sjunker målfunktionsvärdet från -12 till -15 (men det kan inte hända, för vi har ju $\underline{v} = -14$).

3c: Det sista snittet, $q \leq -4u_1 - 17u_2 - 3$, och subgradienten $\xi = (-4, -17)$ ger båda indikation att vi bör minska både u_1 och u_2, men u_2 är redan 0, så u_2 får inte minskas. Alltså väljer vi att minska u_1, och får punkten $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (2.5, 0)$ att lösa subproblemet i. Vi får $\varphi(\bar{u}) = \min -0.5x_1 + 0.5x_2 + x_4 - x_5$ då $x_j \in \{0,1\}$ för $j = 1,2,3,4,5$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, x_3 valfri, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, och $\varphi(\bar{u}) = -14$. Vi har nu $\underline{v} = -14$ och $\bar{v} = -12$.

Vi gick från en punkt med $\varphi(\bar{u}) = -15$ till en punkt med $\varphi(\bar{u}) = -14$, så vi gick åt rätt håll.

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rlrcrcrcl l}
\psi(\bar{y}) = & \min & -3x_1 & - & 7x_2 & - & 5x_3 & + & 10\bar{y} & \\
& \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10\bar{y} & (1) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 5 & (2) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 3 & (3) \\
& & & & & & x_3 & \leq & 5 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rl llll r r}
\psi(\bar{y}) = & \max & -10\bar{y}_1 u_1 & - 5u_2 & - 3u_3 & - 5u_4 + 10\bar{y}_1 & & \\
& \text{då} & -u_1 & -u_2 & & & \leq & -3 \\
& & -u_1 & & -u_3 & & \leq & -7 \\
& & -u_1 & & & -u_4 & \leq & -5 \\
& & u_1, & u_2, & u_3, & u_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (10 - 10u_1^{(l)})y - 5u_2^{(l)} - 3u_2^{(l)} - 5u_2^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = 0$:

$$\begin{array}{rlrcrcrcl l}
\psi(0) = & \min & -3x_1 & - & 7x_2 & - & 5x_3 & & & \\
& \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 & (1) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 5 & (2) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 3 & (3) \\
& & & & & & x_3 & \leq & 5 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Lösningen är $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, med $\psi(0) = 0$, vilket ger $\bar{v} = 0$. Komplementaritet ger $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, så de duala bivillkoren säger $u_1 \geq 3$, $u_1 \geq 7$, $u_1 \geq 5$, och vi får $u_1 = 7$ som optimal duallösning.

Benderssnittet blir nu $q \geq -60y$, och masterproblemet

$$\begin{array}{rl}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -60y \\
& y \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}$$

vilket uppenbarligen har optimallösningen $y = 3$ och $q = -180$, vilket ger $\underline{v} = -180$. Vi har nu $-180 \leq v^* \leq 0$.

För $\bar{y} = 3$:

$$
\begin{array}{rlrcrcrcrl}
\psi(3) = & \min & -3x_1 & - & 7x_2 & - & 5x_3 & + & 30 & \\
& \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 30 & (1) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 5 & (2) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 3 & (3) \\
& & & & & & x_3 & \leq & 5 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Lösningen är $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, med $\psi(3) = -31$, vilket ger $\bar{v} = -31$. Komplementaritet ger $u_1 = 0$, så de duala bivillkoren säger $u_2 \geq 3$, $u_3 \geq 7$, $u_4 \geq 5$, och vi får $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 5$ som optimal duallösning.

Benderssnittet blir nu $q \geq 10y - 61$, och masterproblemet

$$
\begin{array}{rl}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -60y \\
& q \geq 10y - 61 \\
& y \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}
$$

vilket har optimallösningen $y = 1$ och $q = -51$, vilket ger $\underline{v} = -51$. Vi har nu $-51 \leq v^* \leq -31$.

För $\bar{y} = 1$:

$$
\begin{array}{rlrcrcrcrl}
\psi(1) = & \min & -3x_1 & - & 7x_2 & - & 5x_3 & + & 10 & \\
& \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 & (1) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 5 & (2) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 3 & (3) \\
& & & & & & x_3 & \leq & 5 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Lösningen är $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, med $\psi(3) = -42$, vilket ger $\bar{v} = -42$. Komplementaritet ger $u_2 = 0$. Eftersom $x_1 > 0$, får vi $u_1 + u_2 = 3$, dvs. $u_1 = 3$. De duala bivillkoren säger nu $u_3 \geq 4$, $u_4 \geq 2$, vilket måste bli uppfyllt med likhet eftersom $x_2 > 0$ och $x3 > 0$. Vi får alltså $u_1 = 3$, $u_2 = 0$, $u_3 = 4$, $u_4 = 2$ som optimal duallösning.

Benderssnittet blir nu $q \geq -20y - 22$, och masterproblemet

$$
\begin{array}{rl}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -60y \\
& q \geq 10y - 61 \\
& q \geq -20y - 22 \\
& y \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}
$$

vilket har optimallösningen $y = 1$ och $q = -42$, vilket ger $\underline{v} = -42$. Vi har nu $-42 \leq v^* \leq -42$, vilket indikerar optimum.

Optimalösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $y = 1$ $v^* = -42$. Svar i ord: Ta en vagn, samt 2 ton av beställning 1, 3 ton av beställning 2, 5 ton av beställning 3, vilket ger vinsten 42 000.

Uppgift 5 (kortfattat)

Två sorters förpackningar ger att alla flödesvariabler fördubblas. Detsamma gäller alla nodjämviktsvillkor. Om de fasta kostnaderna är gemensamma för alla förpackningar, fördubblas inte den delen av modellen. Det betyder att LP-problemet blir i princip fyra gånger så stort, medan antalet heltalsvariabler inte ökar. Under förutsättning att LP-relaxationen kan lösas ganska snabbt, bör samma metod fungera skapligt.

Om fasta kostnader och kapaciteter är separata för de två förpackningssorterna, faller problemet isär i två delar som kan lösas separat. Varje problem blir då lika stort som för en förpackningssort.

Lagrangerelaxation som ger separabilitet mellan förpackningssorterna vore nog en bra möjlighet. Bendersdekomposition där man i subproblemet fixerar alla binära variabler kan var en god ide, speciellt om subproblemet blir separabelt.

Uppgift 6 (kortfattat)

6a: En elcykel uppvisar många likheter med en elbil: Ett batteri med viss startladdning, laddningen avtar vid färd, inget värde i kvarvarande laddning då man kommer fram, olika inställningar för hur snabbt batteriet laddas ur, olika situationer/vägtyper som påverkar urladdningens hastighet, inte rimligt att ladda under färd.

Skillnader: Alternativet till eldrift behöver inte vara dåligt för miljön, utan bara upplevd trötthet av cyklisten, samt ev. svettning. Det finns alltid en möjlighet att ta sig fram, även om batteriet är helt urladdat. Ren eldrift finns i princip inte, man måste trampa lite för att elmotorn ska dra (men man behöver inte ta i). Den kraft man lägger ner på pedalerna som kan öka farten och minska natteriurladdningen bör nog ses som kontinuerlig (steglös). F.ö. är det uppenbart att man ställer om driftssättet för hand. (I vissa elbilar görs det automatiskt.)

Urladdningskoefficienterna kan vara svåra att ta fram, eftersom de beror på personens vikt samt vind och temperatur (ett kallt batteri laddar ur mycket snabbare).

Metoden är fortfarande lämplig.

6b: Metodiken kan tillämpas på problem där man färdas längs en varierande väg och har en resurs som kontinuerligt går åt, och man kan påverka hur snabbt resursen går åt. Resursen kan kanske vara syrgas vid dykning, bränsle vid en rymdfärd, batteriladdning för andra typer av fordon, etc.

Man kan även ersätta sträcka i problemet med tid, dvs. betrakta åtgången av resursen över tid. Vatten och el för ett hem uppvisar tydliga variationer över dygnet/året, och kan t.o.m. ha olika priser vid olika tider.

Uppgift 7 (kortfattat)

7a: Kontinuerlig utbyggnad ger kontinuerliga variabler i masterproblemet. I princip går Bendersdekomposition utmärkt att använda på precis samma sätt, med enda skillnaden att vissa variabler i masterproblemet inte behöver vara heltal. Masterproblemet blir därför lättare att lösa.

Dock blir ju hela problemet lättare att lösa, och de kontinuerliga utbyggnadsvariablerna kanske bör vara kvar i subproblemet. Effekten blir förändrade bågkostnader i nätverket. Om alla utbyggnader är kontinuerliga, är det “overkill” att använda Bendersdekomposition.

7b: Om man summerar alla snitten i Benders masterproblem, fås ett aggregerat snitt, som kan användas för att ersätta q i målfunktionen. Om vi inte har några extra bivillkor, kan man fixera variablerna precis som i subproblemet i uppgift 2.

Man kan även addera snitten med olika vikter, ofta är de senaste snittet viktigast.

Man kan använda samma subproblem får att få fram nya snitt, men det finns inget som garanterar att det fungerar, dvs. att man får ett nytt snitt när man behöver.

Man kan även basera heuristiken på de reducerade kostnaderna i nätverket, som gjordes i första deluppgiften i projektet, men fortsätta att bygga ut tills man klarar behoven.

Uppgift 8 (kortfattat)

Snowplan har redan procedurer för att flytta cykler mellan fordon, under förutsättning att de passerar samma nod. Det som saknas är möjligheten att flytta en cykel från ett fordon till ett annat fordon även om fordonens områden inte alls angränsar till varandra. För att flytta en cykel från fordon A till fordon B, kan man behöva flytta en cykel från fordon A till fordon C, och sedan en annan ungefär lika stor cykel från fordon C till fordon B. Detta kan t.o.m. behöva ske i flera steg.

Att hitta de fordon som tar mest och minst tid är lätt. När det är gjort, behöver man hitta en “väg”, dvs. en sekvens av fordonsområden att passera mellan dem, och till sist precis vilka cykler som ska flyttas.

Det är oklart om detta lönar sig, dvs. inte tar alltför mycket tid. Det ska jämföras med att göra fler och längre körningar med den existerande metoden.