Tekniska Högskolan i Linköping — Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen — Lösning till tentamen
Optimeringslära — 2017-08-22
Kaj Holmberg

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om sak j tas med, 0 om inte.

max $z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5$
då $33x_1 + 12x_2 + 71x_3 + 63x_4 + 12x_5 \leq 100$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Indata: c_k : nytta, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = den vikt (kg) som får användas till de k första sakerna.
Styrning: $x_k = 1$ om sak k tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 100$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 100$. $f_0(s_0) = 0$.

1c: Det modifierade bivillkoret blir $3x_1 + x_2 + 7x_3 + 6x_4 + x_5 \leq 10$
och vi får $0 \leq s_k \leq 10$ för alla k, samt $s_5 = 10$.

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	3	3	3	3	3	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
1	-	7	7	7	10	10	10	10	10	10	10
$f_2(s_2)$	0	7	7	7	10	10	10	10	10	10	10
$\hat{x}_2(s_2)$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	7	7	7	10	10	10	10	10	10	10
1	-	-	-	-	-	-	-	5	12	12	12
$f_3(s_3)$	0	7	7	7	10	10	10	10	12	12	12
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	7	7	7	10	10	10	10	12	12	12
0	-	-	-	-	-	-	4	11	11	11	14
$f_4(s_4)$	0	7	7	7	10	10	10	11	12	12	14
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	7	7	7	10	10	10	11	12	12	14
0	-	9	16	16	16	19	19	19	20	21	21
$f_5(s_5)$	0	9	16	16	16	19	19	19	20	21	21
$\hat{x}_5(s_5)$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Uppnystning: $s_5 = 10$, $x_5 = 1$, $s_4 = 9$, $x_4 = 0$, $s_3 = 9$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 1$, $s_1 = 1$, $x_1 = 0$, $s_0 = 1$. $z = 21$.
Svar i ord: Ta med sak 2, 3 och 5. Total vinst: 21.

1d: Kontroll: Total vikt 95 kg, mindre än 100 kg. Svar: Ja, lösningen är tillåten. Optimal vinst: 21.

1e: Använd kolumnen med $s_5 = 9$ ovan. Nysta upp: $s_5 = 9$, $x_5 = 1$, $s_4 = 8$, $x_4 = 0$, $s_3 = 8$, $x_3 = 1$, $s_2 = 1$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 21$.
Svar i ord: Ta med sak 2, 3 och 5. Total vinst: 21.
Kontroll: Total vikt 95 kg, mer än 90 kg. Lösningen är inte tillåten. Ta bort den sämsta saken för att få en tillåten lösning, ta bort sak 3. Det ger total vikt 24 kg, vilket är tillåten, och målfunktionsvärde 16, vilket är en undre gräns. (Man kan förbättra den genom att lägga till sak 4, vilket ger undre gräns 20.)

Uppgift 2

min $z = -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 9x_5$
då $33x_1 + 12x_2 + 71x_3 + 63x_4 + 12x_5 \leq 100$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 9x_5 + u(33x_1 + 12x_2 + 71x_3 + 63x_4 + 12x_5 - 100) =$
$(33u - 3)x_1 + (12u - 7)x_2 + (71u - 5)x_3 + (63u - 4)x_4 + (12u - 9)x_5 - 100u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

Optimallösning fås helt enkelt genom att notera tecknet på koefficienten framför varje variabel, och sätta variabeln till ett om koefficienten är negativ, noll om koefficienten är positiv (och valfritt noll eller ett om koefficienten är noll). Subgradient fås genom att sätta in lösningen i det relaxerade bivillkoret.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 9x_5$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0) = -28$, vilket ger $\underline{v} = -28$. Subgradient: $\xi = 91 > 0$. Lösningen ej tillåten.

$\bar{u} = 0.5$ ger $\varphi(0.5) = \min 13.5x_1 - x_2 + 30.5x_3 + 28.5x_4 - 3x_5 - 50$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0.5) = -54$, vilket inte förbättrar $\underline{v}$.

Subgradienten blir $\xi = -76 < 0$, lösningen är tillåten, och vi får $\bar{v} = -16$.

$\bar{u} = 0.1$ ger $\varphi(0.1) = \min 0.3x_1 - 5.8x_2 + 2.1x_3 + 2.3x_4 - 7.8x_5 - 10$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0.1) = -23.6$, vilket ger $\underline{v} = -23.6$. Primal lösning är samma som förut.

Bästa gränser: $-23.6 \leq v^* \leq -16$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(33u-3)x_1 + (12u-7)x_2 + (71u-5)x_3 + (63u-4)x_4 + (12u-9)x_5$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Detta kräver att $(33u-3) \geq 0$, $(12u-7) \leq 0$, $(71u-5) \leq 0$, $(63u-4) \geq 0$, och $(12u-9) \leq 0$, dvs. $u \geq 1/11$, $u \leq 7/12$, $u \leq 5/71$, $u \geq 4/63$ och $u \leq 3/4$, vilket saknar lösning (ty $5/71 < 1/11$). Vi har alltså inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet ses i uppgift 2 (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -3x_1^{(l)} - 7x_2^{(l)} - 5x_3^{(l)} - 4x_4^{(l)} - 9x_5^{(l)} \\ & \qquad +u(33x_1^{(l)} + 12x_2^{(l)} + 71x_3^{(l)} + 63x_4^{(l)} + 12x_5^{(l)} - 100) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (0, 1, 1, 0, 1) ger snitt: $q \leq -5u - 21$.
Punkten (0, 1, 0, 1, 1) ger snitt: $q \leq -13u - 20$.
Punkten (1, 1, 0, 0, 1) ger snitt: $q \leq -43u - 19$.
Punkten (1, 1, 1, 0, 1) ger snitt: $q \leq 28u - 24$.

Masterproblemet blir då

$$\begin{array}{rlrl} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & -5u - 21 & (1) \\ & q \leq & -13u - 20 & (2) \\ & q \leq & -43u - 19 & (3) \\ & q \leq & 28u - 24 & (4) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

I punkten $u = 0.1$ ger snitten: $q \leq -21.5$, $q \leq -21.3$, $q \leq -23.3$, $q \leq -21.2$. Alltså blir $q = -23.3$ och snitt 3 är aktivt. Det är inte säkert att $u = 0.1$ är optimalt, så $q = -23.3$ är en undre gräns till v_{DM}, som är en övre gräns till v^*. Det är alltså inte säkert att -23.3 är en övre gräns till v^*.

Från uppgift 2 får vi lösningen av subproblemet i $\bar{u} = 0.1$ som $x^{(5)} = (0, 1, 0, 0, 1)$ med $\varphi(0.1) = -23.6$. Denna punkt ger snitt 5: $q \leq -76u - 16$.

I $u = 0.1$ ger detta snitt $q \leq -23.6$, vilket är lägre än -23.3, så (bara) snitt 5 är aktivt.

Vi har nu undre gräns -23.6, men faktiskt ingen övre gräns, eftersom vi inte har löst masterproblemet till optimalitet.

3c: Det aktiva snittet är $q \leq -76u - 16$, vilket tyder på att q kan ökas genom att minska u.

3d: Om vi betraktar LP-dualen av masterproblemet, och vet att bara snitt 5 är aktivt, ger komplementaritetsvillkoren att $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, vilket leder till att $\lambda_5 = 1$. Det betyder att den konvexkombination av subproblemlösningar man får bara blir $x = x^{(5)} = (0, 1, 0, 0, 1)$.

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\psi(\bar{y}) = & \min & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 4x_3 & + & 5\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2 + 7\bar{y}_3 & \\
\text{då} & & x_1 & & & & & \leq & \bar{y}_1 + 0.5\bar{y}_3 & (1) \\
& & & & x_2 & & & \leq & \bar{y}_2 + 0.5\bar{y}_3 & (2) \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{llrcr}
\psi(\bar{y}) = \max & \multicolumn{4}{l}{-(\bar{y}_1 + 0.5\bar{y}_3)u_1 - (\bar{y}_2 + 0.5\bar{y}_3)u_2 - u_3 + 5\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2 + 7\bar{y}_3} \\
\text{då} & & -u_1 - u_3 & \leq & -10 \\
& & -u_2 - u_3 & \leq & -12 \\
& & -u_3 & \leq & -4 \\
& & u_1, u_2, u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas $U = \{u \geq 0 : u_1 + u_3 \geq 10, u_2 + u_3 \geq 12, u_3 \geq 4\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (5 - u_1^{(l)})y_1 + (5 - u_2^{(l)})y_2 + (7 - 0.5u_1^{(l)} - 0.5u_2^{(l)})y_3 - u_3^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Notera att bivillkoren säger att lösningen blir högst ett y lika med ett.

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = 0$, $\bar{y}_3 = 0$: $\psi(0) = \max -u_3$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 6$, $u_2 = 8$, $u_3 = 4$, samt $x = (0, 0, 1)$, med $\psi(0) = -4$, vilket ger $\bar{v} = -4$. Benderssnittet blir $q \geq -y_1 - 3y_2 - 4$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -y_1 - 3y_2 - 4 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Här ser vi att det är bäst att sätta $y_2 = 1$, vilket ger $q = -7$. Vi har nu $-7 \leq v^* \leq -4$.

För $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = 1$, $\bar{y}_3 = 0$: $\psi(\bar{y}) = \max -u_2 - u_3 + 5$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 6$, $u_2 = 8$, $u_3 = 4$, samt $x = (0, 1, 0)$, med $\psi(\bar{y}) = -7$, vilket ger $\bar{v} = -7$.

Vi har nu $-7 \leq v^* \leq -7$, så optimum är funnet.
Lösningen är $y = (0, 1, 0)$ och $x = (0, 1, 0)$, med målfunktionsvärde -7.
Svar i ord: Hyr ut allt till Cecilia, vilket ger vinst 700 kr.

4c: U har bara en extrempunkt, så det finns bara ett Benderssnitt.

Uppgift 5

5a: Masterproblemet gör att subproblemet ger en ny extrempunkt till det tillåtna området i subproblemet i varje iteration. Det finns bara ändligt många sådana.

5b: Masterproblemet gör att subproblemet ger en ny dual extrempunkt till det dualt tillåtna området i subproblemet i varje iteration. Det finns bara ändligt många sådana.

Uppgift 6 (kortfattat)

Relevanta problem har flöde som cirkulerar i ett nätverk, med visst tillflöde, med omvandlingsfaktorer i vissa noder och fasta kostnader i vissa noder. Efterfrågan (på genomflöde) uppträder i vissa noder.

Detta kan användas på alla möjliga varutransporter, där emballage eller annat återanvänds. Det kan också handla om återvinning av material, såsom tidningspapper, batterier, gasoltuber, frysklampar, etc., eller fall där hela enheter återanvänds efter viss bearbetning.

Flödet ska inte bestå av olika varusorter, och det är heller inte relevant med varutransporter utan tillbakaflöde.

Uppgift 7 (kortfattat)

Här handlar det om att färdas längs en väg där en viss resurs förbrukas i olika takt beroende på sträckornas egenskaper. Man ska också kunna påverka förbrukningen genom olika inställningar, och i princip minska förbrukningen genom att öka kostnaden.

Resursen kan vara el (för olika typer av fordon), bensin (där besök på en bensinmack ses som en inställning) eller andra bränslen. Det som förbrukar resursen kan vara en bil, en människa, ett flygplan etc.

Vägen kan också vara tid, dvs. man göra olika saker vid olika tidpunkter (istället för vid olika platser längs vägen).

Det är inte relevant om man inte kan påverka förbrukningen, och det är nog inte effektivt om man samtidigt ska välja mellan flera vägar (även om vägval och inställningsval kan hanteras på liknande sätt). Det är heller inte relevant om vägen inte består av många olika segment.

Uppgift 8 (kortfattat)

Här handlar det om ett planeringsproblem med flöde i ett nätverk, där olika åtgärder kan påverka bågarnas kapacitet till vissa kostnader. Flödet kan vara el, vatten, olja, varutransporter, biltrafik, tågtrafik etc.

Flödet bör inte bestå av flera olika sorter, och antalet utbyggnadsalternativ bör inte vara alltför stort, om metoden ska vara effektiv. Kostnaderna bör vara linjära för flödet, samt linjära för utbyggnaden (så att benders masterproblem kan formuleras och lösas).

Uppgift 9 (kortfattat)

Problemet som löses kan kallas k-kinesiska brevbärarproblemet, dvs. handlar om att täcka alla bågar i en graf med k st. fordon. Det är inte relevant om det bara är ett fordon, och det är lite problematiskt om det är noderna som har behov, inte bågarna, eller om bågarna måste passeras flera gånger.

Det fungerar (givetvis) för att planera postutdelning med flera brevbärare, men också för sandning och saltning av vägar samt insamling av sopor. Man kan också tänka sig annan bearbetning av vägar (målning, rensning av ogräs, städning, genomsökning etc.), eller andra förflyttningssätt än bil (gång, ridning, cyckling etc.).